Volumenelement in Zylinderkoordinaten

Für die Koordinatentransformation

$$x = \varrho \cos\varphi, \quad y = \varrho \sin\varphi, \quad z = z$$

ist

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\,.$$

Insbesondere gilt damit für das Integral einer Funktion f auf einem Zylinder $Z:\ 0 \le \varrho \le \varrho_0,\ 0 \le z \le z_0$

$$\int\limits_Z f = \int\limits_0^{z_0} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\varrho_0} f(\varrho, \varphi, z)\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\,,$$

und, falls f nur vom Abstand ϱ zur Symmetrieachse abhängt,
$\int_Z f = 2\pi z_0 \int_0^{\varrho_0} f(\varrho)\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho$.
Das Flächenelement für ebene Polarkoordinaten ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) transformiert sich analog: $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$.

Beweis

Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation $(x, y, z) = g(\varrho, \varphi, z)$

$$g' = (g_\varrho, g_\varphi, g_z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

orthogonale Spalten (lokal orthogonale Transformation) $\quad \implies$

$$|\det g'| = |g_\varrho|\,|g_\varphi|\,|g_z| = 1 \cdot \varrho \cdot 1 = \varrho$$

Beispiel

Integral der Gauß-Funktion:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

berechne zunächst das Quadrat des Integrals:

$$\begin{aligned}
\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) \mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) \mathrm{d}x\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-y^2\right) \mathrm{d}y\right) \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2 - y^2\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Polarkoordinaten $\rightsquigarrow$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \exp(-r^2) r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 2\pi \left[-\frac{1}{2}\exp(-r^2)\right]_0^{\infty} = \pi$$