# Volumenelement in Kugelkoordinaten

Für die Koordinatentransformation

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta$$

ist

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Insbesondere gilt damit für das Integral einer Funktion $f$ auf einer Kugel $K:\ 0 \le r \le R$

$$\int_K f = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} f(r,\vartheta,\varphi)\, r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Für eine radialsymmetrische Funktion ist $\int_K f = 4\pi\int\limits_0^R f(r)r^2\,\mathrm{d}r$ .

## Beweis

Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation $(x, y, z) = g(r, \vartheta, \varphi)$

$$g' = (g_r, g_\vartheta, g_\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

orthogonale Spalten (lokal orthogonale Transformation) $\rightsquigarrow$ Funktionaldeterminante

$$|\det g'| = |g_r|\,|g_\vartheta|\,|g_\varphi| = 1 \cdot r \cdot r\sin\vartheta = r^2\sin\vartheta$$

Integration über $\vartheta$ und $\varphi$ bei einer radialsymmetrischen Funktion $f$:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\,[-\cos\vartheta]_0^{\pi} = 4\pi$$

Vorfaktor bei der Berechnung von $\int_K f \;\widehat{=}$ Flächeninhalt der Einheitskugeloberfläche

## Beispiel

Integral von $r^\alpha$ über die Kugel $K : r \le 1$ sowie über deren Komplement

(i) Integral über $K$:

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{1} r^2\, r^\alpha \sin\vartheta \,\mathrm{d}r r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi \int\limits_0^1 r^{\alpha+2}\,\mathrm{d}r$$

existiert für $\alpha > -3$ mit Wert $4\pi \left[\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{\alpha+3}$

(ii) Integral über $\mathbb{R}^3 \setminus K$:

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_1^{\infty} r^\alpha\, r^2 \,\sin\vartheta \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi \int\limits_1^\infty r^{\alpha+2}\,\mathrm{d}r$$

existiert für $\alpha < -3$ mit Wert $4\pi \left[\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right]_1^\infty = \frac{-4\pi}{\alpha+3}$

## Beispiel

Sauerstoffmenge in der Atmosphäre:
barometrische Höhenformel $\rightsquigarrow$ Druck in der Höhe $h$ über Nullniveau

$$p(h) = p_0\, e^{-\frac{\varrho_0 g h}{p_0}}$$

mit $p_0 = 101300 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$ dem Normaldruck, $\varrho_0 = 0.150 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ der Sauerstoffdichte auf Nullniveau (21% der Luft sind Sauerstoff) und $g = 9.80 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ der Erdbeschleunigung

ideale Gasgleichung $\rightsquigarrow$ Dichte

$$\varrho = \frac{p}{R_s T}$$

mit $R_s = \frac{k_B}{m_{\text{Molekül}}} = 519 \frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{K\,kg}}$ der spezifischen Gaskonstante für Sauerstoff und $T$ der in Kelvin gemessenen Temperatur (als konstant $-3^\circ C$, also $T = 270\mathrm{K}$, angenommen)

$\rightsquigarrow$ Näherung für die Gesamtmasse des Sauerstoffs in der Atmosphäre

$$M = \int\limits_V \varrho \,\mathrm{d}V = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^\infty \frac{1}{R_s T} p_0 \, e^{-\frac{\varrho_0 g h}{p_0}} \, r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\vartheta$$

mit $r_0 = 6.37 \cdot 10^6$m dem Erdradius

Substitution von $h = r - r_0$ und Integration über $\vartheta$ und $\varphi$ $\rightsquigarrow$

$$M = 4\pi \frac{p_0}{R_s \cdot T} \mathrm{e}^{\frac{\varrho_0 g}{p_0} r_0} \int\limits_{r_0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\varrho_0 g}{p_0} r} r^2 \, dr$$

zweifache partielle Integration $\rightsquigarrow$

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \mathrm{e}^{-cr} r^2 \, dr = \left[ -\frac{r^2}{c} \mathrm{e}^{-cr} \right]_{r_0}^{\infty} + \left[ -\frac{2r}{c^2} \mathrm{e}^{-cr} \right]_{r_0}^{\infty} + \left[ -\frac{2}{c^3} \mathrm{e}^{-cr} \right]_{r_0}^{\infty}$$

$(c = \frac{\varrho_0 g}{p_0})$

insgesamt

$$M = \frac{4\pi p_0}{R_s T}\left(c^{-1} r_0^2 + 2c^{-2} r_0 + 2c^{-3}\right) = 2.59 \cdot 10^{19}\text{kg}$$

Zum Vergleich

- Erdmasse: $6 \cdot 10^{24}$kg $(2.3 \cdot 10^5\, M)$
- Mondmasse: $7.4 \cdot 10^{22}$kg $\left(2.9 \cdot 10^3\, M\right)$