Volumenelement in Kugelkoordinaten

Für die Koordinatentransformation

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r \cos\vartheta$$

ist

$$dx\, dy\, dz = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi\,.$$

Insbesondere gilt damit für das Integral einer Funktion f auf einer Kugel $K:\ 0 \leq r \leq R$

$$\int\limits_K f = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{R} f(r, \vartheta, \varphi)\, r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi\,.$$

Speziell ist für eine radialsymmetrische Funktiopn $f(r)$

$$\int\limits_K f = 4\pi \int\limits_0^R f(r) r^2 dr \,.$$

Beweis:

Die Koordinatentransformation

$$(x, y, z) = g(r, \vartheta, \varphi)$$

ist lokal orthogonal, d.h. die Jacobi-Matrix

$$g' = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

hat orthogonale Spalten.

$\rightsquigarrow$ Funktionaldeterminante

$$|\det g'| = |g_r|\,|g_\vartheta|\,|g_\varphi| = 1 \cdot r \cdot r\sin\vartheta = r^2\sin\vartheta$$

Integration über ϑ und φ bei einer radialsymmetrischen Funktion f:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 2\pi \left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi} = 4\pi$$

Vorfaktor bei der Berechnung von $\int_K f \mathrel{\widehat{=}}$ Flächeninhalt der Einheitskugeloberfläche

Beispiel:

(i) Integral von r^α auf der Kugel $K:\ r \le 1$:

$$I_\alpha = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{1} r^2\, r^\alpha \sin\vartheta \, dr\, d\vartheta\, d\varphi = 4\pi \int_0^1 r^{\alpha+2}\, dr$$

I_α existiert nur für $\alpha > -3$ mit Wert $4\pi \left[\dfrac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right]_0^1 = \dfrac{4\pi}{\alpha+3}$

(ii) Integral von r^α auf $\mathbb{R}^3 \setminus K$:

$$I_\alpha = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_1^{\infty} r^\alpha\, r^2 \sin\vartheta \, dr\, d\vartheta\, d\varphi = 4\pi \int_1^\infty r^{\alpha+2}\, dr$$

I_α existiert nur für $\alpha < -3$ mit Wert $4\pi \left[\dfrac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right]_1^\infty = \dfrac{-4\pi}{\alpha+3}$