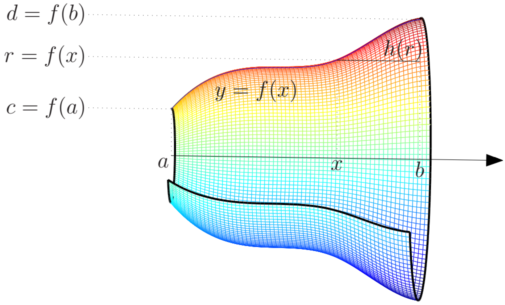
Volumen von Rotationskörpern

Das Volumen V des durch Rotation des Funktionsgraphen $r = f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$, um die x-Achse erzeugten Körpers lässt sich durch Integration über die kreisförmigen Querschnitte berechnen:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x \,.$$



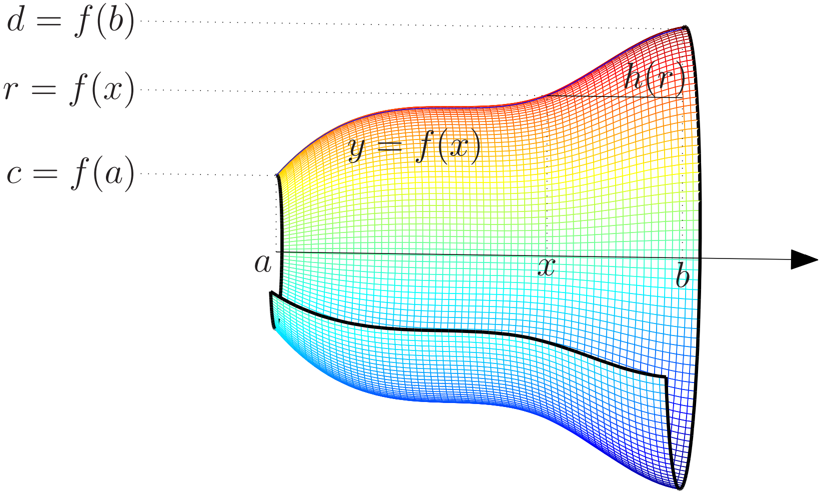
Bei monotoner Radiusfunktion kann man alternativ über die Zylindermäntel integrieren:

$$V = \pi c^2(b-a) + 2\pi \int_c^d r h(r)\,\mathrm{d}r\,,$$

wobei c bzw. d der minimale bzw. maximale Radius r und $h(r)$ die Höhe des in dem Körper enthaltenen Zylindermantels mit Radius r sind.

Beweis

(i) erste Formel:



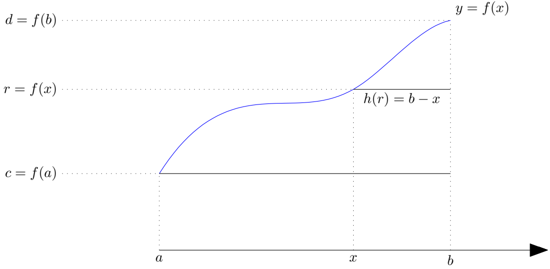
Partition Δ mit Intervallen $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1 \ldots n$
Einschluss des Volumens durch einen Zylinder mit minimalem Radius $f(\xi_i)$ und einem Zylinder mit maximalem Radius $f(\eta_i)$
$\rightsquigarrow$ Abschätzung für das Gesamtvolumen

$$\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)^2 \Delta x_i \leq V \leq \pi \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)^2 \Delta x_i$$

mit $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
Konvergenz der beiden Riemann-Summen $\implies$

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x$$

(ii) zweite Formel (monoton wachsendes f):



Umformung der behaupteten Formel durch Substitution

$$r = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(r), \quad \mathrm{d}r = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$\rightsquigarrow$

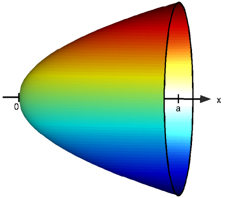
$$
\begin{aligned}
2\pi \int c = f(a)^{d=f(b)} h(r) r \,\mathrm{d}r &= \pi \int_a^b \underbrace{(b-x)}_{u} \underbrace{2f(x)f'(x)}_{v'} \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \left[(b-x)f(x)^2\right]_a^b + \pi \int_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{-\pi(b-a)c^2}_{\text{innerer Zylinder}} + \pi \int_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ Äquivalenz zur ersten Formel

(iii) analog: monoton fallendes f

Beispiel

Volumen eines Paraboloids, erzeugt durch Rotation der Kurve $r = \sqrt{x}$ um die x-Achse



(i) horizontale Integration über Kreisscheiben (Radius $f(x)$):

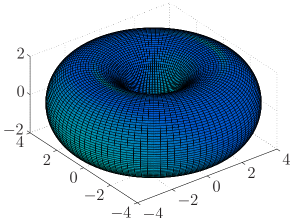
$$\pi \int_0^a (\underbrace{\sqrt{x}}_{f(x)})^2 \, \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{1}{2} \pi a^2$$

(ii) vertikale Integration über Zylindermäntel (Höhe $h(r)$):

$$2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r \, \underbrace{(a - r^2)}_{h(r)} \, \mathrm{d}r = 2\pi \left[\frac{ar^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \pi a^2$$

Beispiel

Volumen eines Torus, erzeugt durch Rotation einer Kreisscheibe mit Radius r um eine Achse im Abstand R vom Mittelpunkt



Differenz zweier Rotationskörper $(\pi \int (r_+^2 - r_-^2))$ $\rightsquigarrow$

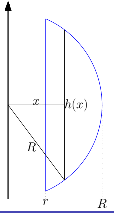
$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-r}^{r} \left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \, \mathrm{d}x - \pi \int_{-r}^{r} \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \, \mathrm{d}x \\
&= 4\pi \int_{-r}^{r} R\sqrt{r^2 - x^2} \, \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Substitution $x = r \sin\varphi$, $\mathrm{d}x = r \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi$ $\rightsquigarrow$

$$V = 4\pi R r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \, r \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi = 4\pi R r^2 \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 R r^2$$

Beispiel

Volumen einer Kugel mit Radius R mit ausgestanztem Zylinder um die vertikale Achse mit Radius r



Integration über Zylindermäntel mit Radius x, $r \leq x \leq R$:

$$V = 2\pi \int_r^R x h(x)\,\mathrm{d}r, \quad h(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}$$

$R = 5$, $r = 3 \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_3^5 2x\sqrt{25 - x^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \left[-\frac{2}{3}\left(25 - x^2\right)^{3/2}\right]_3^5 \\ &= \frac{4}{3}\pi(25-9)^{3/2} = \frac{256}{3}\pi \end{aligned}$$