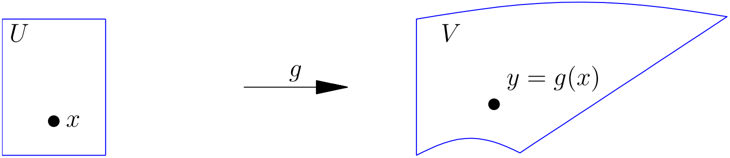
Transformation mehrdimensionaler Integrale

Für eine bijektive, stetig differenzierbare Transformation g eines regulären Bereichs $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine stetige Funktionen f gilt

$$\int_U f \circ g \, |\det g'| \, \mathrm{d}U = \int_V f \, \mathrm{d}V \,, \quad V = g(U) \,,$$

wobei die Determinante der Jacobi-Matrix von g, $\det g'$, als Funktionaldeterminante der Transformation bezeichnet wird. Sie beschreibt die lokale Änderung des Volumenelementes:

$$\mathrm{d}V = |\det g'| \, \mathrm{d}U \,.$$



Für eine lokal orthogonale Koordinatentransformation g, d.h. bei orthogonalen Spalten von g', ist

$$|\det g'| = \prod_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right| ,$$

d.h. der Skalierungsfaktor des Volumenelements ist das Produkt der Skalierungsfaktoren der einzelnen Variablen.

Bei einer affinen Transformation $y = Ax + b$ ändert sich das Volumenelement gemäß

$$\mathrm{d}y = |\det A| \, \mathrm{d}x \, .$$

Insbesondere gilt für eine Skalierung der Variablen, $y_i = \lambda_i x_i$

$$\mathrm{d}y_i = \lambda_i \, \mathrm{d}x_i \, .$$

Die Voraussetzungen können etwas abgeschwächt werden. Insbesondere muss die Bijektivität von g und die Invertierbarkeit von g' nur im Innern von U gefordert werden.

Unstetigkeiten von f und bestimmte Singularitäten sind ebenfalls möglich, wenn die Existenz beider Integrale gewährleistet ist.

Beispiel

Integration über einen Bereich V, der durch zwei geradlinig verbundene Parabelsegmente begrenzt wird

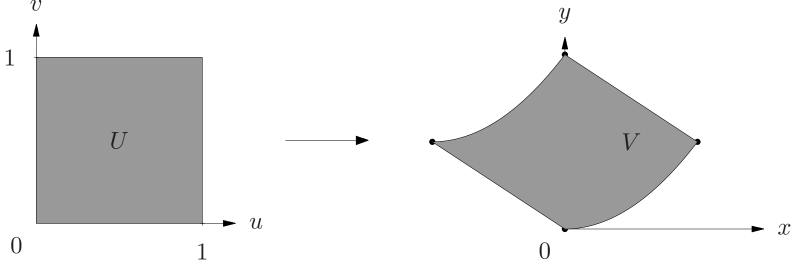
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le u \le 1$$

kontinuierliche Verschiebung der Parabelsegmente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le v \le 1$$

$\rightsquigarrow$ bijektive Abbildung auf das Einheitsquadrat U

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v + u \\ v + u^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le u,\, v \le 1$$



Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2u & 1 \end{pmatrix}$$

mit Funktionaldeterminante

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 2u + 1 > 0$$

Volumenelement

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (2u+1)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = (2u+1)\mathrm{d}U$$

Transformationssatz für $f(x,y) = x + y \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\int\limits_V (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int\limits_U \left[(-v+u) + (v+u^2)\right](2u+1)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \underbrace{(u+u^2)(2u+1)}_{2u^3+3u^2+u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int\limits_0^1 \left(\frac{2}{4} + 1 + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}v = 2
\end{aligned}$$

Beispiel

Volumen eines Torus, der durch Drehung der Kreisscheibe,

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R + rs\cos\vartheta \\ rs\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad 0 \le s \le 1, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi,$$

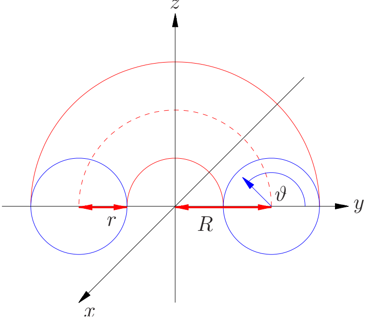
mit Radius $r < R$ um die z-Achse erzeugt wird

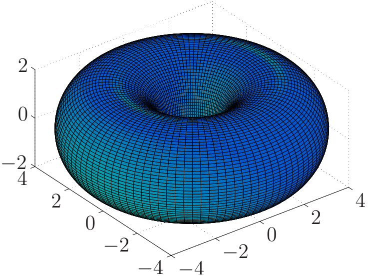
mögliche Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p(s, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} (R + rs\cos\vartheta)\cos\varphi \\ (R + rs\cos\vartheta)\sin\varphi \\ rs\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

mit $0 \le \varphi \le 2\pi$

(Ersetzen von der Richtung $(1, 0, 0)$ durch $(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ in der Parametrisierung der Kreisscheibe)





Jacobi-Matrix der Transformation $p: \ (s, \vartheta, \varphi)^{\mathrm{t}} \mapsto (x, y, z)^{\mathrm{t}}$

$$p' = (p_s, p_\vartheta, p_\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi & -rs\sin\vartheta\cos\varphi & -(R + rs\cos\vartheta)\sin\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi & -rs\sin\vartheta\sin\varphi & (R + rs\cos\vartheta)\cos\varphi \\ r\sin\vartheta & rs\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

orthogonale Spalten $\rightsquigarrow$ Funktionaldeterminate

$$|\det p'| = |p_s||p_\vartheta||p_\varphi| = |r||rs||R + rs\cos\vartheta| = r^2 s(R + rs\cos\vartheta)$$

Berechnung des Volumens mit dem Transformationssatz $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 s(R + rs\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}s \\
&\quad = 2\pi r^2 \left(\int_0^1 \int_0^{2\pi} sR\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}s + \int_0^1 \int_0^{2\pi} rs^2\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}s \right) \\
&\quad = 2\pi r^2 \left(\int_0^1 2\pi sR\,\mathrm{d}s + 0 \right) = 2\pi^2 R r^2
\end{aligned}$$

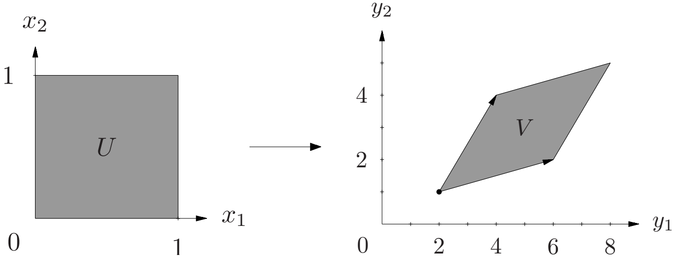
Beispiel

Integration über ein Parallelogramm V, das durch eine affine Transformation des Einheitsquadrates $U = [0,1]^2$ parametrisiert wird:

$$U \ni x \mapsto y = Ax + b \in V$$

Der Eckpunkt b und die Spalten von A spannen das Parallelogramm auf, z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Funktionaldeterminante der Transformation

$$\det \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \det A = 10$$

Integral einer linearen Funktion

$$f(y) = 3y_1 - 4y_2 = (3, -4) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

über V:

$$\begin{aligned} \int_V f &= \int_U f(Ax + b) \cdot 10 \, \mathrm{d}U \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \underbrace{(3, -4) \left(\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}_{3(4x_1+2x_2+2)-4(x_1+3x_2+1)=8x_1-6x_2+2} \cdot 10 \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 = 30 \end{aligned}$$

Verallgemeinerung:
invertierbare affine Abbildung des Einheitswürfels $U = [0,1]^n$,

$$(x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}} \mapsto Ax + b$$

$\rightsquigarrow$ Parallelepiped V, aufgespannt durch die Spalten der Matrix A
Integral einer linearen Funktion $f(y) = c^{\mathrm{t}} y$ über V

$$\int\limits_V f = \int\limits_U c^{\mathrm{t}}(Ax + b) |\det A| \, \mathrm{d}x = c^{\mathrm{t}}(Ae/2 + b) |\det A|$$

mit $e = (1, \ldots, 1)^{\mathrm{t}}$
Begründung:

$$\int_U c^{\mathrm{t}} Ax \, \mathrm{d}x = \sum_i \int_U c^{\mathrm{t}} a_i x_i \, \mathrm{d}x = \sum_i c^{\mathrm{t}} a_i / 2$$

mit a_i den Spalten von A