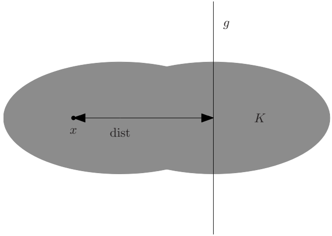
Tägheitsmoment

Das Trägheitsmoment eines Körpers K mit Dichte $\varrho(x)$, $x \in K$, um eine Achse g ist

$$I = \int_K \mathrm{dist}(x,g)^2 \varrho(x)\,\mathrm{d}K\,,$$

wobei dist die Abstandsfunktion bezeichnet.

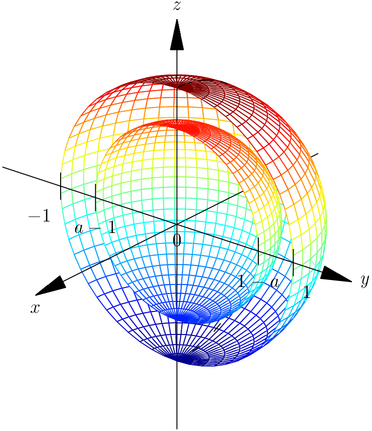


Beispiel

Trägheitsmoment einer Hohlkugel K :

$$1 - a \leq r \leq 1,$$
$$0 \leq \vartheta \leq \pi,$$
$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

bei konstanter Dichte ϱ



Symmetrie $\rightsquigarrow$ berechne das Trägheitsmoment um die z-Achse g

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{1-a}^{1} \varrho(\underbrace{r\sin\vartheta}_{\text{dist}((x,y,z),g)})^2 \underbrace{\left(r^2\sin\vartheta\right)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi}_{\mathrm{d}K} \\
&= \frac{2\pi\varrho}{5}\left(1-(1-a)^5\right)\int_0^{\pi}\sin^3\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= \frac{2\pi\varrho}{5}\left(1-(1-a)^5\right)\left[-\cos\vartheta+\frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{8\pi\varrho}{15}\left(1-(1-a)^5\right)
\end{aligned}
$$

Dichte ϱ bei Masse 1 der Hohlkugel $\iff$

$$
1 = \int_K \varrho = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{1-a}^{1}\varrho r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi = \frac{4\pi\varrho}{3}(1-(1-a)^3)
$$

$\Longrightarrow$

$$
I(a) = \frac{2}{5}\frac{(1-(1-a)^5)}{(1-(1-a)^3)}
$$

Trägheitsmoment der ganzen Kugel

$$I(1) = 2/5$$

Grenzwert für $a = 0$: $I(0) = 2/3$ (Regel von L'Hôpital)