Schwerpunkt

Die Masse eines Körpers K mit Dichte $\varrho(x)$, $x \in K$, ist

$$m = \int_K \varrho(x) \,\mathrm{d}K \,.$$

Speziell erhält man für $\varrho(x) = 1$ das Volumen V von K.

Die ν-te Koordinate des Massenschwerpunktes S berechnet sich gemäß

$$s_\nu = m^{-1} \int\limits_K x_\nu \varrho(x) \,\mathrm{d}K \,.$$

Für $\varrho(x) = 1$ ergibt sich

$$s_\nu = V^{-1} \int_K x_\nu \,\mathrm{d}K \,,$$

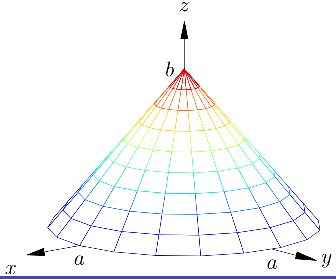
und S wird als geometrischer Schwerpunkt oder auch einfach als Schwerpunkt bezeichnet.

Beispiel

Schwerpunkt eines Kegels K:

$$0 \le \varphi \le 2\pi,$$
$$0 \le \varrho \le \tfrac{a}{b}(b-z),$$
$$0 \le z \le b$$

mit Grundkreisradius a und Höhe b.



Volumen $V = \frac{\pi}{3}a^2 b$

Symmetrie $\rightsquigarrow$ x-und y-Koordinate des Schwerpunkts Null

z-Koordinate:

$$s_z = \frac{1}{V}\int_K z\,\mathrm{d}K$$

Transformation auf Zylinderkoordinaten $\rightsquigarrow$

$$
\begin{aligned}
V\, s_z &= \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \int_0^{2\pi} \varrho z \,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\varrho \mathrm{d}z \\
&= 2\pi \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \varrho z \,\mathrm{d}\varrho \mathrm{d}z \\
&= \pi \int_0^b z \left(\frac{a}{b}(b-z) \right)^2 \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\pi}{12} a^2 b^2
\end{aligned}
$$

$\rightsquigarrow$ Schwerpunkt: $S = (0, 0, b/4)$