Satz von Fubini

Ein Integral einer stetigen Funktion über einem Elementarbereich

$$V: \; a_j(x_1, \ldots, x_{j-1}) \le x_j \le b_j(x_1, \ldots, x_{j-1})$$

lässt sich durch Hintereinanderausführung eindimensionaler Integrationen berechnen:

$$\int\limits_V f \, dV = \int\limits_{a_1}^{b_1} \int\limits_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \cdots \int\limits_{a_n(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{b_n(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_1 \, .$$

Dabei spielt die Reihenfolge der Variablen bei der Beschreibung des Elementarbereichs keine Rolle. Insbesondere gilt für Doppelintegrale mit konstanten Integrationsgrenzen

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x, y) \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x, y) \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \, .$$

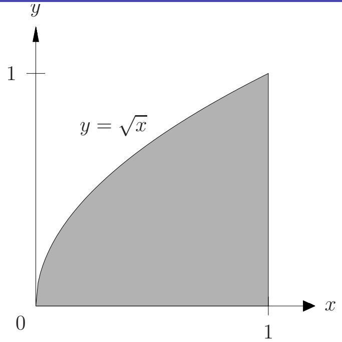
Beispiel

Integration von

$$f(x, y) = y \cos\left(x^2\right)$$

über dem Bereich

$$V: \quad 0 \leq x \leq 1\,, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{x}$$



Satz von Fubini $\rightsquigarrow$ Berechnung mit zwei eindimensionalen Integrationen:

$$\begin{aligned}\int\limits_V f &= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\sqrt{x}} y\cos\left(x^2\right)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\cos\left(x^2\right) \right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^1 \frac{1}{2}x\cos\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}\sin\left(x^2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{4}\sin(1)\end{aligned}$$

Vertauschung der Integrationsreihenfolge $\rightsquigarrow$
nicht (explizit) berechenbares Integral

$$\int\limits_V f = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{y^2}^1 y\cos\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x \right)\,\mathrm{d}y$$

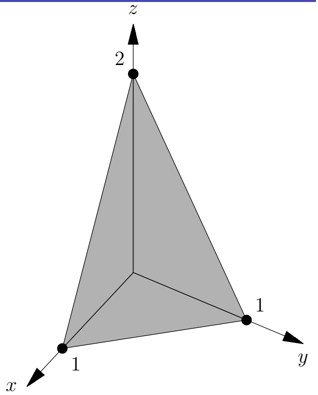
Beispiel

Integration von

$$f(x, y, z) = x$$

über den Tetraeder

$$T: \quad x, y, z \geq 0, \quad x + y + \frac{z}{2} \leq 1$$



Darstellung von T als Elementarbereich mit Hilfe der Ungleichungen

$$\begin{aligned} &0 \leq x \leq 1 \\ &0 \leq y \leq 1 - x \\ &0 \leq z \leq 2\,(1 - x - y) \end{aligned}$$

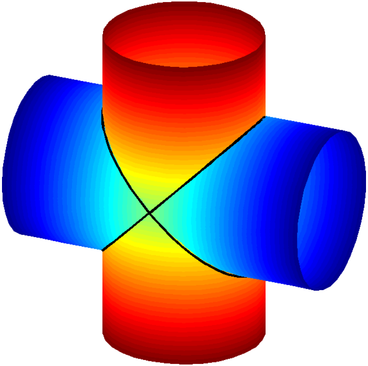
Satz von Fubini $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\int_T f &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{2(1-x-y)} x \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 2x\,(1-x-y)\;\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \underbrace{2x(1-x)^2 - 2x(1-x)^2/2}_{x-2x^2+x^3} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Beispiel

Volumen des Durchschnitts der beiden Zylinder

$$Z_1: \; x^2 + y^2 \leq r^2, \quad Z_2: \; x^2 + z^2 \leq r^2$$



Symmetrie $\rightsquigarrow$ Betrachtung der Teilkörper im ersten Oktant;
Integrationsgebiet: Viertelkreisscheibe, definiert durch Z_1

$$K:\ 0 \leq x \leq r, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}$$

Z_2 $\rightsquigarrow$ Höhe $h(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2}$ des Schnittkörpers über K
Teilvolumen

$$\int_K h = \int_0^r \left(\int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^r (r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = r^3 - \frac{1}{3} r^3 = 2r^3/3$$

$\rightsquigarrow$ $16r^3/3$ als Volumen für den gesamten Körper

Beispiel

Das Volumen V_n der n-dimensionalen Einheitskugel

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| \leq 1\}$$

ist

$$V_n = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,,$$

mit der Gamma-Funktion Γ.

Für $n \leq 6$ sind die Werte in der folgenden Tabelle angegeben:

n	1	2	3	4	5	6
V_n	2	π	$4\pi/3$	$\pi^2/2$	$8\pi^2/15$	$\pi^3/6$

Definition der Gamma-Funktion $\quad \Longrightarrow$

$$\operatorname{vol} B_1 = 2 = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}, \quad B_1 = [-1, 1]$$

Induktionsschritt $(n-1) \to n$:
Schnitt von B_n mit der Hyperebene $x_n = \xi,\ (-1 \leq \xi \leq 1) \quad \rightsquigarrow$
$(n-1)$-dimensionale Kugel mit Radius $\sqrt{1-\xi^2}$

Satz von Fubini $\quad \Longrightarrow$

$$\operatorname{vol} B_n = \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{vol} B_{n-1} \, \mathrm{d}\xi$$

(Skalierung des Volumes von B_{n-1} mit der $(n-1)$-ten Potenz des Radius')

Substitution $\xi = \sin t$, $\mathrm{d}\xi = \cos t \, \mathrm{d}t \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \left(1-\xi^2\right)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{d}\xi &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1-\sin^2 t\right)^{\frac{n-1}{2}} \cos t \, \mathrm{d}t \\
&= 2\int_{0}^{\pi/2} (\cos t)^{n-1} \cos t \, \mathrm{d}t \\
&= \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}
\end{aligned}$$

Induktionsannahme

$$\operatorname{vol} B_{n-1} = \frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

$\rightsquigarrow$ expliziter Ausdruck für $\operatorname{vol} B_n$

$$\operatorname{vol} B_n = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\,\frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

Funktionalgleichung der Gamma-Funktion,

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

$\Longrightarrow$

$$\operatorname{vol} B_n = \frac{2\sqrt{\pi^n}\,\frac{n-1}{2}\,\Gamma(\frac{n-1}{2})}{(n-1)\,\Gamma(\frac{n-1}{2})\,\frac{n}{2}\,\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{n\,\Gamma(\frac{n}{2})}$$