Partielle Integration

Für stetig differenzierbare Funktionen f und g auf einem regulären Bereich $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit regulärem $(n-1)$-dimensionalem Rand $S = \partial V$ gilt

$$\int_V f\,(\partial_\nu g) = \int_S f\,g\,\xi_\nu - \int_V (\partial_\nu f)\,g\,,$$

wobei ξ die nach außen gerichtete Einheitsnormale von S bezeichnet.

Verschwinden f und g ausserhalb einer beschränkten Menge, so folgt insbesondere, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,(\partial_\nu g) = -\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_\nu f)\,g$$

und allgemeiner, für glatte Funktionen,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\,\partial^\alpha f = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f\,\partial^\alpha g\,.$$

Beweis

Hauptsatz für Mehrfachintegrale $\implies$

$$\int_V \partial_\nu(fg) = \int_{\partial V} (fg)\xi_\nu$$

für eine beliebige partielle Ableitung ∂_ν

Produktregel,

$$\partial_\nu(fg) = g\partial_\nu f + f\partial_\nu g\,,$$

$\rightsquigarrow$ behauptete Identiät

kein Randterm, falls f und g auf S verschwinden $\rightsquigarrow$ Identität mit $V = \mathbb{R}^n$

Iteration der Identität $\rightsquigarrow$

Formel für partielle Intgration höherer Ableitungen