Mehrdimensionales Integral

Das Integral einer stetigen Funktion f auf einem regulären Bereich $V \subset \mathbb{R}^n$ kann als Grenzwert von Riemann-Summen definiert werden:

$$\int\limits_V f \, \mathrm{d}V = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_k f(P_k) \Delta V_k, \quad \Delta V_k = \operatorname{vol} V_k \, .$$

Dabei wird V durch eine Vereinigung V_Δ von bis auf Ränder disjunkter Elementarbereiche V_k (im Allgemeinen Simplizes oder Parallelepipede) approximiert, d.h. die Volumina der Differenzmengen $V \backslash V_\Delta$ und $V_\Delta \backslash V$ streben gegen Null. Mit $|\Delta|$ wird der maximale Durchmesser der V_k bezeichnet und P_k ist ein beliebiger Punkt in V_k.
Die Schreibweise $\Delta V_k \to \mathrm{d}V$ symbolisiert den Grenzprozess, und $\mathrm{d}V$ nennt man das Volumenelement. Abkürzend schreibt man auch $\int_V f$ oder, wenn man die Integrationsvariablen hervorheben will, ausführlicher

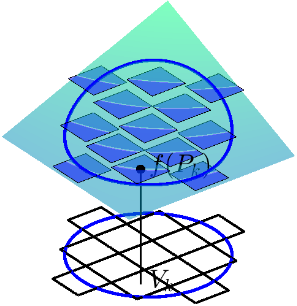
$$\int\limits_V f(x) \, \mathrm{d}V = \int\limits_V f(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \, .$$

Aufgrund der Stetigkeit von f ist die Definition des Riemann-Integrals sowohl von der Wahl der Elementarbereiche V_k als auch der Punkte P_k unabhängig.

Für eine positive Funktion f entspricht das Integral dem Volumen der Menge

$$\{(x_1, \ldots, x_n, h) : \ 0 \le h \le f(x)$$

Insbesondere ist $\int\limits_V 1$ das Volumen des Integrationsbereichs V.



Die Glattheitsvoraussetzungen an f und V können abgeschwächt werden, indem man das Integral über einen geeigneten Grenzprozess definiert. Man spricht dann von einem uneigentlichen Integral.

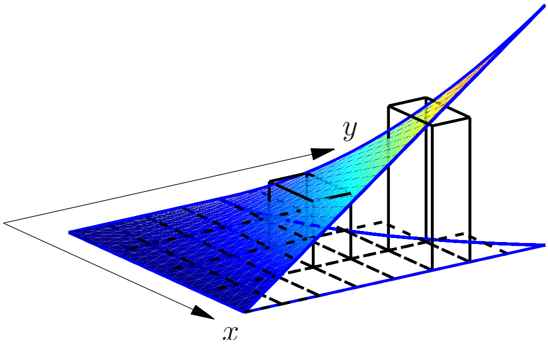
Beispiel

Integration von

$$f(x, y) = xy$$

über den Bereich

$$V:\ 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 + x^2$$



Approximation für ein Quadratgitter mit Gitterweite $h = 1/n$

$$h^2 \sum_{0\le j<n} \sum_{0\le kh<1+(jh)^2} (jh)(kh) = h^4 \sum_{0\le j<n} j \sum_{0\le k<n+j^2/n} k$$

Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} h^4 \sum_{0\le j<n} & j\left((n+j^2/n)^2/2 + O(n)\right) \\ &= h^4 \sum_{0\le j<n} jn^2/2 + j^3 + j^5/(2n^2) + O(n^2) \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) + O(h)\,, \end{aligned}$$

denn $\sum_{0\le\ell<n} \ell^m = n^{m+1}/(m+1) + O(n^m)$
$\rightsquigarrow$ $\frac{7}{12}$ als Wert des Integrals