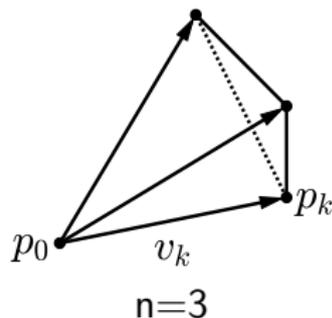
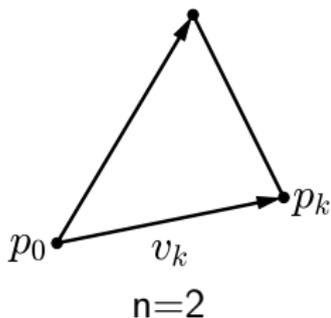


Simplex

Ein n -dimensionaler Simplex S ist die konvexe Hülle von $n + 1$ Punkten p_0, \dots, p_n , die nicht alle in einem $(n - 1)$ -dimensionalen Unterraum liegen bzw. für die die Vektoren $v_k = p_k - p_0$, $k = 1, \dots, n$, linear unabhängig sind:

$$S = \left\{ x = \sum_{k=0}^n s_k p_k : \sum_k s_k = 1, s_k \geq 0 \right\}.$$



Zwei- und dreidimensionale Simplexes werden als Dreiecke bzw. Tetraeder bezeichnet.

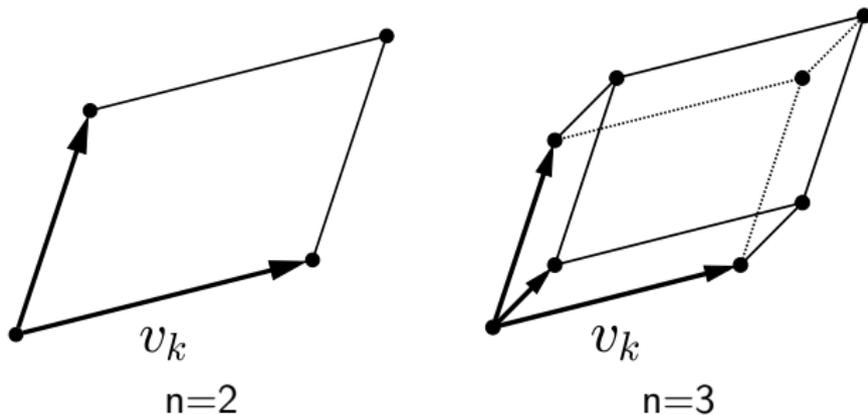
Für $p_k = (p_{k,1}, \dots, p_{k,n})^t \in \mathbb{R}^n$ kann das Volumen eines Simplex mit Hilfe von Determinanten berechnet werden:

$$\text{vol } S = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} p_0 & \cdots & p_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{n!} |\det(v_1, \dots, v_n)| .$$

Parallelepipid

Ein n -dimensionales Parallelepipid P wird von n linear unabhängigen Vektoren a_k aufgespannt:

$$P = \left\{ x = \sum_{k=1}^n s_k v_k : 0 \leq s_k \leq 1 \right\}.$$



Zwei- und dreidimensionale Parallelepipede werden als Parallelogramme bzw. Spate bezeichnet.

Für $v_k \in \mathbb{R}^n$ ist das Volumen eines Parallelepipeds der Betrag der Determinante der aufspannenden Vektoren:

$$\text{vol } P = |\det(v_1, \dots, v_n)| .$$

Integrationsbereich

Ein Elementarbereich $V \subseteq \mathbb{R}^n$ wird nach einer geeigneten orthogonalen Koordinatentransformation $x \rightarrow x'$ durch Graphen stetig differenzierbarer Funktionen a_k und b_k begrenzt:

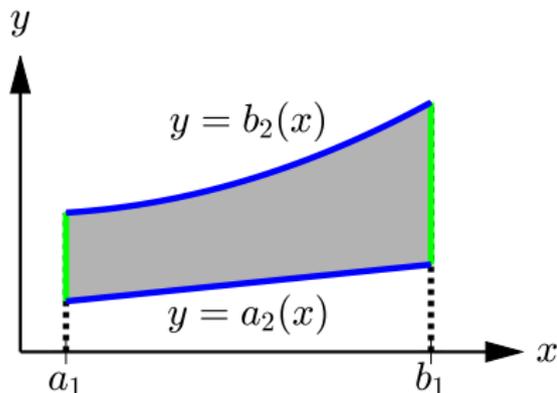
$$a_1 \leq x'_1 \leq b_1, \quad a_2(x'_1) \leq x'_2 \leq b_2(x'_1)$$

...

$$a_n(x'_1, \dots, x'_{n-1}) \leq x'_n \leq b_n(x'_1, \dots, x'_{n-1})$$

Dies ist eine kanonische Verallgemeinerung eines rechteckigen Bereichs, bei dem die Grenzen a_k , b_k konstant sind.

Die Abbildung zeigt einen zweidimensionalen Elementarbereich. Die y -Koordinate ist durch zwei Funktionen $a_2(x)$ und $b_2(x)$ begrenzt. Entsprechend können für einen dreidimensionalen Elementarbereich die Schranken für die z -Koordinaten von x und y abhängen.



Eine bis auf Randkurven bzw. -flächen disjunkte endliche Vereinigung von Elementarbereichen wird als regulärer Bereich bezeichnet.

Zur Berechnung von Integralen zerlegt man den Integrationsbereich in möglichst einfache Elementarbereiche. Bei einer numerischen Approximation wird meist eine Zerlegung in Simplizes bevorzugt (Dreiecke in zwei bzw. Tetraeder in drei Dimensionen) und auf eine exakte Randdarstellung verzichtet.

Mehrdimensionales Integral

Das Integral einer stetigen Funktion f auf einem regulären Bereich $V \subset \mathbb{R}^n$ kann als Grenzwert von Riemann-Summen definiert werden:

$$\int_V f \, dV = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_k f(P_k) \Delta V_k, \quad \Delta V_k = \text{vol } V_k.$$

Dabei wird V durch eine Vereinigung V_Δ von bis auf Ränder disjunkter Elementarbereiche V_k (im Allgemeinen Simplexes oder Parallelepipede) approximiert, d.h. die Volumina der Differenzmengen $V \setminus V_\Delta$ und $V_\Delta \setminus V$ streben gegen Null. Mit $|\Delta|$ wird der maximale Durchmesser der V_k bezeichnet und P_k ist ein beliebiger Punkt in V_k .

Die Schreibweise $\Delta V_k \rightarrow dV$ symbolisiert den Grenzprozess, und dV nennt man das Volumenelement. Abkürzend schreibt man auch $\int_V f$ oder, wenn man die Integrationsvariablen hervorheben will, ausführlicher

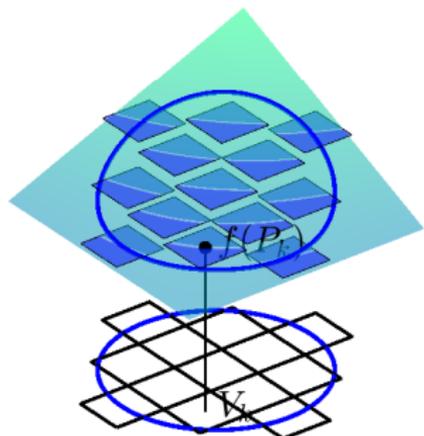
$$\int_V f(x) \, dV = \int_V f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n.$$

Aufgrund der Stetigkeit von f ist die Definition des Riemann-Integrals sowohl von der Wahl der Elementarbereiche V_k als auch der Punkte P_k unabhängig.

Für eine positive Funktion f entspricht das Integral dem Volumen der Menge

$$\{(x_1, \dots, x_n, h) : 0 \leq h \leq f(x)\}$$

Insbesondere ist $\int_V 1$ das Volumen des Integrationsbereichs V .



Die Glattheitsvoraussetzungen an f und V können abgeschwächt werden, indem man das Integral über einen geeigneten Grenzprozess definiert. Man spricht dann von einem uneigentlichen Integral.

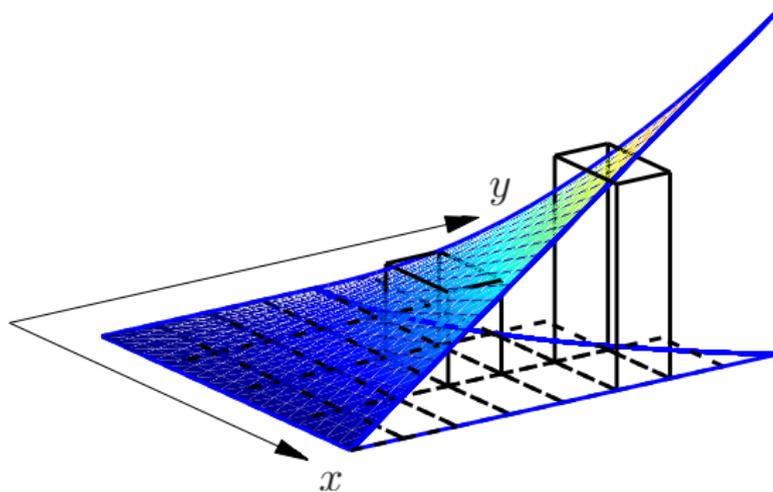
Beispiel

Integration von

$$f(x, y) = xy$$

über den Bereich

$$V : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 + x^2$$



Approximation für ein Quadratgitter mit Gitterweite $h = 1/n$

$$h^2 \sum_{0 \leq j < n} \sum_{0 \leq kh < 1 + (jh)^2} (jh)(kh) = h^4 \sum_{0 \leq j < n} j \sum_{0 \leq k < n + j^2/n} k$$

Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung \rightsquigarrow

$$\begin{aligned} h^4 \sum_{0 \leq j < n} j \left((n + j^2/n)^2 / 2 + O(n) \right) \\ = h^4 \sum_{0 \leq j < n} j n^2 / 2 + j^3 + j^5 / (2n^2) + O(n^2) \\ = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right) + O(h), \end{aligned}$$

denn $\sum_{0 \leq l < n} l^m = n^{m+1} / (m+1) + O(n^m)$

$\rightsquigarrow \frac{7}{12}$ als Wert des Integrals

Satz von Fubini

Ein Integral einer stetigen Funktion über einem Elementarbereich

$$V : a_j(x_1, \dots, x_{j-1}) \leq x_j \leq b_j(x_1, \dots, x_{j-1})$$

lässt sich durch Hintereinanderausführung eindimensionaler Integrationen berechnen:

$$\int_V f \, dV = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \cdots \int_{a_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{b_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_n \cdots dx_2 dx_1 .$$

Dabei spielt die Reihenfolge der Variablen bei der Beschreibung des Elementarbereichs keine Rolle. Insbesondere gilt für Doppelintegrale mit konstanten Integrationsgrenzen

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx dy .$$

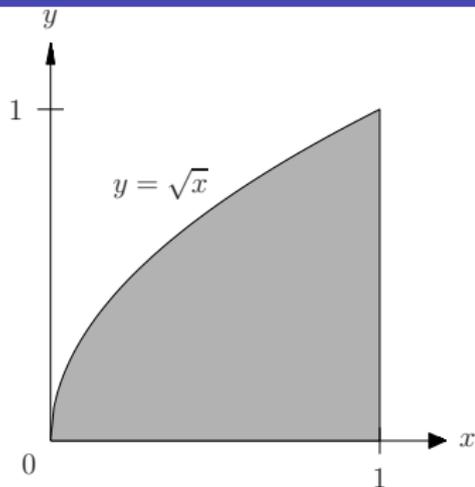
Beispiel

Integration von

$$f(x, y) = y \cos(x^2)$$

über dem Bereich

$$V: 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{x}$$



Satz von Fubini \rightsquigarrow Berechnung mit zwei eindimensionalen
Integrationen:

$$\begin{aligned}\int_V f &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} y \cos(x^2) dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \cos(x^2) \right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} x \cos(x^2) dx = \left[\frac{1}{4} \sin(x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{4} \sin(1)\end{aligned}$$

Vertauschung der Integrationsreihenfolge \rightsquigarrow
nicht (explizit) berechenbares Integral

$$\int_V f = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^1 y \cos(x^2) dx \right) dy$$

Beispiel

Integration von

$$f(x, y, z) = x$$

über den Tetraeder

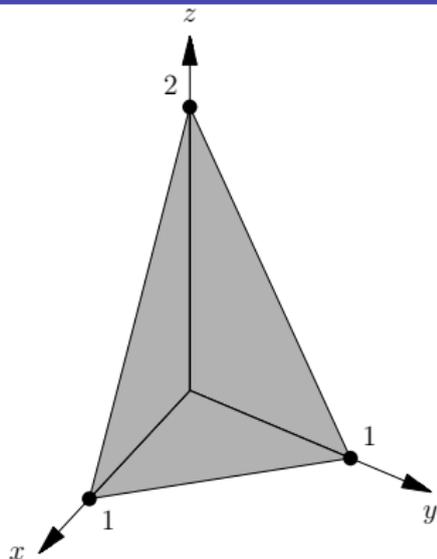
$$T : \quad x, y, z \geq 0, \quad x + y + \frac{z}{2} \leq 1$$

Darstellung von T als Elementarbereich mit Hilfe der Ungleichungen

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq y \leq 1 - x$$

$$0 \leq z \leq 2(1 - x - y)$$



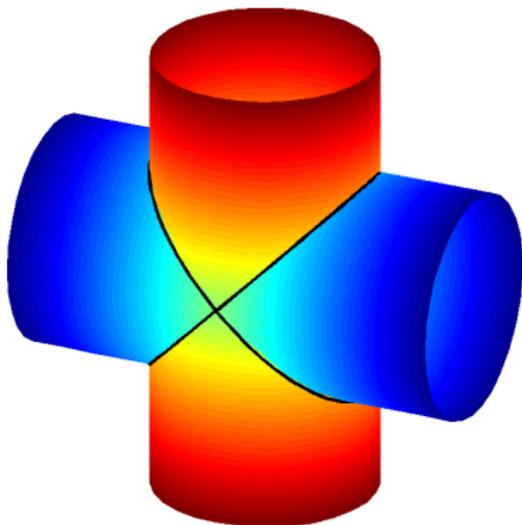
Satz von Fubini \rightsquigarrow

$$\begin{aligned}\int_T f &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{2(1-x-y)} x \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 2x(1-x-y) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \underbrace{2x(1-x)^2 - 2x(1-x)^2/2}_{x-2x^2+x^3} dx = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

Beispiel

Volumen des Durchschnitts der beiden Zylinder

$$Z_1 : x^2 + y^2 \leq r^2, \quad Z_2 : x^2 + z^2 \leq r^2$$



Symmetrie \rightsquigarrow Betrachtung der Teilkörper im ersten Oktant;

Integrationsgebiet: Viertelkreisscheibe, definiert durch Z_1

$$K : 0 \leq x \leq r, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}$$

Z_2 \rightsquigarrow Höhe $h(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2}$ des Schnittkörpers über K

Teilvolumen

$$\int_K h = \int_0^r \left(\int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \sqrt{r^2 - x^2} \, dy \right) dx = \int_0^r (r^2 - x^2) \, dx = r^3 - \frac{1}{3}r^3 = 2r^3/3$$

\rightsquigarrow $16r^3/3$ als Volumen für den gesamten Körper

Beispiel

Das Volumen V_n der n -dimensionalen Einheitskugel

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$$

ist

$$V_n = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{n\Gamma(\frac{n}{2})},$$

mit der Gamma-Funktion Γ .

Für $n \leq 6$ sind die Werte in der folgenden Tabelle angegeben:

n	1	2	3	4	5	6
V_n	2	π	$4\pi/3$	$\pi^2/2$	$8\pi^2/15$	$\pi^3/6$

Definition der Gamma-Funktion \implies

$$\text{vol } B_1 = 2 = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2})}, \quad B_1 = [-1, 1]$$

Induktionsschritt $(n - 1) \rightarrow n$:

Schnitt von B_n mit der Hyperebene $x_n = \xi$, $(-1 \leq \xi \leq 1)$ \rightsquigarrow
 $(n - 1)$ -dimensionale Kugel mit Radius $\sqrt{1 - \xi^2}$

Satz von Fubini \implies

$$\text{vol } B_n = \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{\frac{n-1}{2}} \text{vol } B_{n-1} d\xi$$

(Skalierung des Volumens von B_{n-1} mit der $(n - 1)$ -ten Potenz des Radius')

Substitution $\xi = \sin t$, $d\xi = \cos t dt$ \rightsquigarrow

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{\frac{n-1}{2}} d\xi &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)^{\frac{n-1}{2}} \cos t dt \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n-1} \cos t dt \\ &= \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \end{aligned}$$

Induktionsannahme

$$\text{vol } B_{n-1} = \frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

↪ expliziter Ausdruck für $\text{vol } B_n$

$$\text{vol } B_n = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

Funktionalgleichung der Gamma-Funktion,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

⇒

$$\text{vol } B_n = \frac{2\sqrt{\pi^n} \frac{n-1}{2} \Gamma(\frac{n-1}{2})}{(n-1)\Gamma(\frac{n-1}{2}) \frac{n}{2} \Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}$$

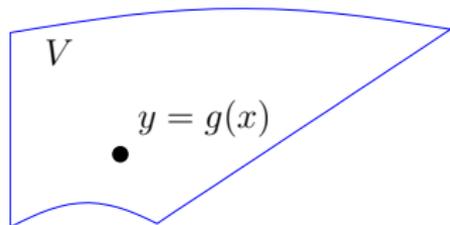
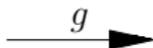
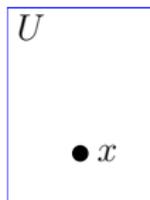
Transformation mehrdimensionaler Integrale

Für eine bijektive, stetig differenzierbare Transformation g eines regulären Bereichs $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine stetige Funktionen f gilt

$$\int_U f \circ g |\det g'| dU = \int_V f dV, \quad V = g(U),$$

wobei die Determinante der Jacobi-Matrix von g , $\det g'$, als Funktionaldeterminante der Transformation bezeichnet wird. Sie beschreibt die lokale Änderung des Volumenelementes:

$$dV = |\det g'| dU.$$



Für eine lokal orthogonale Koordinatentransformation g , d.h. bei orthogonalen Spalten von g' , ist

$$|\det g'| = \prod_{i=1}^n \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|,$$

d.h. der Skalierungsfaktor des Volumenelements ist das Produkt der Skalierungsfaktoren der einzelnen Variablen.

Bei einer affinen Transformation $y = Ax + b$ ändert sich das Volumenelement gemäß

$$dy = |\det A| dx.$$

Insbesondere gilt für eine Skalierung der Variablen, $y_i = \lambda_i x_i$

$$dy_i = \lambda_i dx_i.$$

Die Voraussetzungen können etwas abgeschwächt werden. Insbesondere muss die Bijektivität von g und die Invertierbarkeit von g' nur im Innern von U gefordert werden.

Unstetigkeiten von f und bestimmte Singularitäten sind ebenfalls möglich, wenn die Existenz beider Integrale gewährleistet ist.

Beispiel

Integration über einen Bereich V , der durch zwei geradlinig verbundene Parabelsegmente begrenzt wird

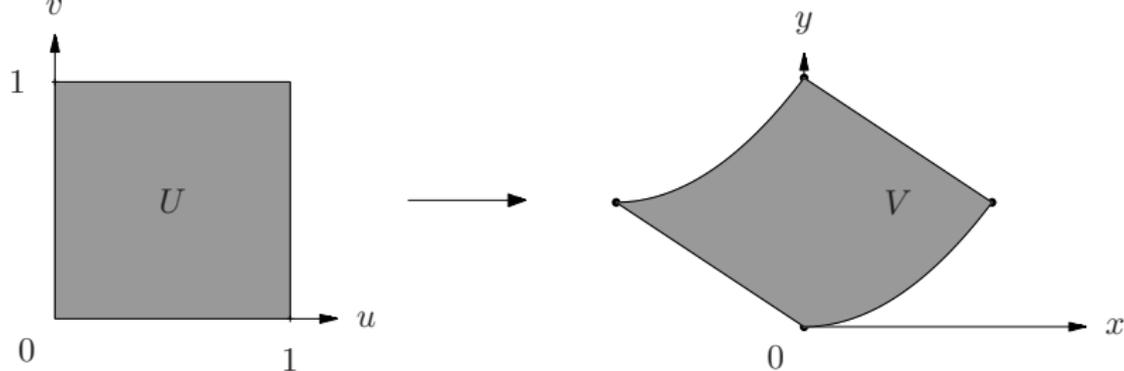
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq u \leq 1$$

kontinuierliche Verschiebung der Parabelsegmente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq v \leq 1$$

\rightsquigarrow bijektive Abbildung auf das Einheitsquadrat U

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v + u \\ v + u^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq u, v \leq 1$$



Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2u & 1 \end{pmatrix}$$

mit Funktionaldeterminante

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 2u + 1 > 0$$

Volumenelement

$$dV = dx dy = (2u + 1)du dv = (2u + 1)dU$$

Transformationsatz für $f(x, y) = x + y \implies$

$$\begin{aligned} \int_V (x + y) dx dy &= \int_U [(-v + u) + (v + u^2)] (2u + 1) du dv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \underbrace{(u + u^2)(2u + 1)}_{2u^3 + 3u^2 + u} du dv \\ &= \int_0^1 \left(\frac{2}{4} + 1 + \frac{1}{2} \right) dv = 2 \end{aligned}$$

Beispiel

Volumen eines Torus, der durch Drehung der Kreisscheibe,

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R + rs \cos \vartheta \\ rs \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi,$$

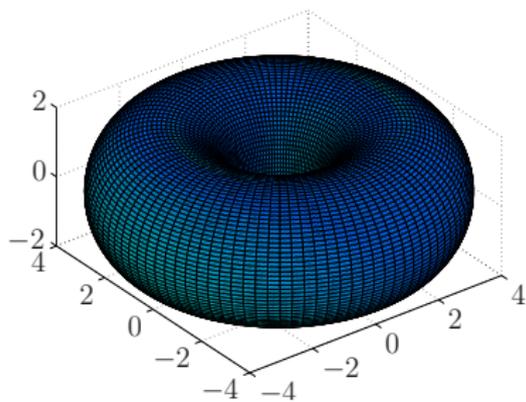
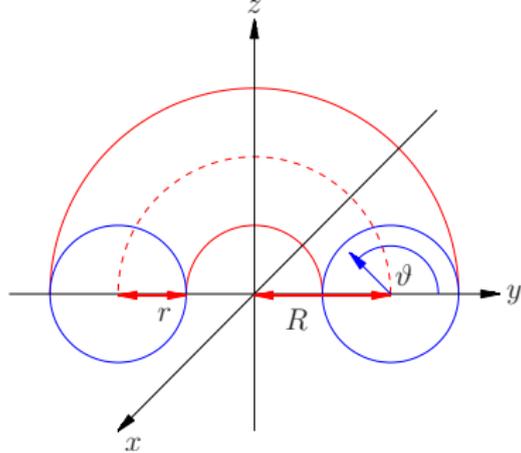
mit Radius $r < R$ um die z -Achse erzeugt wird

mögliche Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p(s, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} (R + rs \cos \vartheta) \cos \varphi \\ (R + rs \cos \vartheta) \sin \varphi \\ rs \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

(Ersetzen von der Richtung $(1, 0, 0)$ durch $(\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ in der Parametrisierung der Kreisscheibe)



Jacobi-Matrix der Transformation $p : (s, \vartheta, \varphi)^t \mapsto (x, y, z)^t$

$$p' = (p_s, p_\vartheta, p_\varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \cos \varphi & -rs \sin \vartheta \cos \varphi & -(R + rs \cos \vartheta) \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \sin \varphi & -rs \sin \vartheta \sin \varphi & (R + rs \cos \vartheta) \cos \varphi \\ r \sin \vartheta & rs \cos \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

orthogonale Spalten \rightsquigarrow Funktionaldeterminante

$$|\det p'| = |p_s||p_\vartheta||p_\varphi| = |r||rs||R + rs \cos \vartheta| = r^2 s (R + rs \cos \vartheta)$$

Berechnung des Volumens mit dem Transformationsatz \rightsquigarrow

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 s (R + rs \cos \vartheta) \, d\varphi \, d\vartheta \, ds \\ &= 2\pi r^2 \left(\int_0^1 \int_0^{2\pi} sR \, d\vartheta \, ds + \int_0^1 \int_0^{2\pi} rs^2 \cos \vartheta \, d\vartheta \, ds \right) \\ &= 2\pi r^2 \left(\int_0^1 2\pi sR \, ds + 0 \right) = 2\pi^2 R r^2 \end{aligned}$$

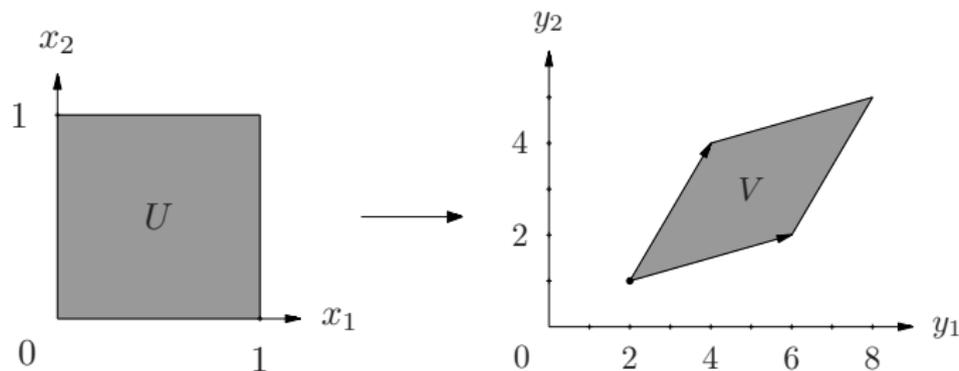
Beispiel

Integration über ein Parallelogramm V , das durch eine affine Transformation des Einheitsquadrates $U = [0, 1]^2$ parametrisiert wird:

$$U \ni x \mapsto y = Ax + b \in V$$

Der Eckpunkt b und die Spalten von A spannen das Parallelogramm auf, z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Funktionaldeterminante der Transformation

$$\det \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \det A = 10$$

Integral einer linearen Funktion

$$f(y) = 3y_1 - 4y_2 = (3, -4) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

über V :

$$\begin{aligned} \int_V f &= \int_U f(Ax + b) \cdot 10 \, dU \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (3, -4) \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}_{3(4x_1+2x_2+2) - 4(x_1+3x_2+1) = 8x_1 - 6x_2 + 2} \cdot 10 \, dx_1 \, dx_2 = 30 \end{aligned}$$

Verallgemeinerung:

invertierbare affine Abbildung des Einheitswürfels $U = [0, 1]^n$,

$$(x_1, \dots, x_n)^t \mapsto Ax + b$$

\rightsquigarrow Parallelepiped V , aufgespannt durch die Spalten der Matrix A

Integral einer linearen Funktion $f(y) = c^t y$ über V

$$\int_V f = \int_U c^t(Ax + b) |\det A| dx = c^t(Ae/2 + b) |\det A|$$

mit $e = (1, \dots, 1)^t$

Begründung:

$$\int_U c^t Ax dx = \sum_i \int_U c^t a_i x_i dx = \sum_i c^t a_i / 2$$

mit a_i den Spalten von A

Länge einer Kurve

Die Länge L einer Kurve mit stetig differenzierbarer Parametrisierung $t \mapsto p(t)$, $a \leq t \leq b$, ist

$$\int_a^b |p'(t)| dt.$$

Speziell gilt für eine Kurve in der xy -Ebene mit der Parameterdarstellung $p(t) = (x(t), y(t))$

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Insbesondere hat der Graph einer Funktion $y = f(x)$, $x \in [c, d]$ die Länge

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Die Länge des Kurvenstücks zwischen $p(a)$ und $p(t)$,

$$s(t) = \int_a^t |p'(\tau)| d\tau,$$

kann als kanonischer Kurvenparameter benutzt werden. Man erhält die sogenannte Parametrisierung nach Bogenlänge:

$$q(s) = p(t), \quad |q'| = 1.$$

Aufgrund des normierten Tangentenvektors gilt für diese kanonische Parametrisierung

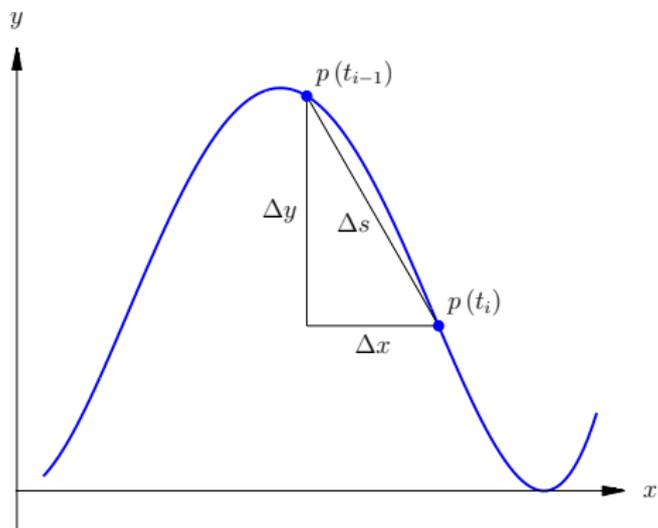
$$\int_C f = \int_0^L f(q(s)) ds$$

mit L der Länge von C .

Beweis

Länge einer ebenen Kurve:

Approximation durch Streckenzug zu einer Partition des Parameterintervalls in Teilintervalle $[t_{i-1}, t_i]$



Mittelwertsatz \implies

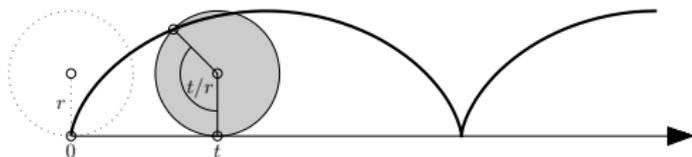
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \Delta s_i &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(p'_1(\xi_i))^2 + (p'_2(\eta_i))^2} \Delta t_i\end{aligned}$$

mit $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$

Riemann-Summe des angegebenen Integrals

Beispiel

Parametrisierung und Länge einer Zykloide, die die Bahnkurve eines Punktes auf einem rollenden Kreis beschreibt



Bahnkurve (Abrollen entlang der x-Achse, Radius r)

$$x(t) = t + r \cos(3\pi/2 - t/r) = t - r \sin(t/r)$$

$$y(t) = r + r \sin(3\pi/2 - t/r) = r - r \cos(t/r)$$

denn $t = (2\pi r) \cdot \text{Drehwinkel } (2\pi) \iff \text{Drehwinkel} = t/r$

$$\cos(3\pi/2 - \alpha) = -\sin \alpha, \quad \sin(3\pi/2 - \alpha) = -\cos \alpha$$

Länge des Bogens für $t \in [0, 2\pi r]$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi r} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi r} \sqrt{(1 - \cos(t/r))^2 + (\sin(t/r))^2} dt \end{aligned}$$

Substitution $s = t/r$, $dt = r ds$ und Identitäten

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1, \quad 1 - \cos \varphi = 2 \sin^2(\varphi/2)$$

\implies

$$L = r \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos(s))} ds = r \int_0^{2\pi} 2 \sin(s/2) ds = 8r$$

Beispiel

Parametrisierung nach Bogenlänge $q(s)$ der Spirale

$$C : \quad p(t) = \exp(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad p'(t) = \exp(t) \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

Definition \implies

$$s(t) = \int_0^t |p'(\tau)| \, d\tau = \int_0^t \sqrt{2} \exp(\tau) \, d\tau = \sqrt{2}(\exp(t) - 1)$$

$$\text{bzw. } t(s) = \ln(s/\sqrt{2} + 1)$$

Einsetzen in Parametrisierung $p \implies$

$$q(s) = (s/\sqrt{2} + 1) \begin{pmatrix} \cos(\ln(s/\sqrt{2} + 1)) \\ \sin(\ln(s/\sqrt{2} + 1)) \end{pmatrix}$$

Kurvenintegral

Das Integral einer stetigen Funktion f entlang einer Kurve C mit regulärer stetig differenzierbarer Parametrisierung

$$t \rightarrow p(t) \in \mathbb{R}^n, \quad |p'(t)| \neq 0, \quad t \in [a, b],$$

ist als

$$\int_C f = \int_a^b f(p(t)) |p'(t)| dt$$

definiert und unabhängig von der gewählten Parametrisierung.

Insbesondere erhält man für $f = 1$ die Länge der Kurve.

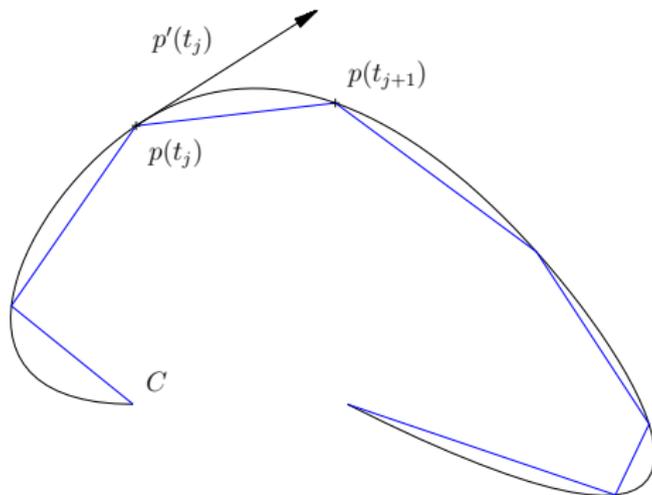
Die Glattheitsvoraussetzungen an f und p können abgeschwächt werden, indem man das Integral über einen geeigneten Grenzprozess erklärt.

Beweis

Begründung der Definition mit Hilfe von Riemann-Summen

$$\int_C f \approx \sum_j f(p_j) |p(t_{j+1}) - p(t_j)|$$

mit $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_J = b$ einer Partition von $[a, b]$



Mittelwertsatz \implies

$$p(t_{j+1}) - p(t_j) = \begin{pmatrix} p'_1(\tau_{1,j}) \\ \vdots \\ p'_n(\tau_{n,j}) \end{pmatrix} \Delta t_j$$

mit $\tau_{\nu,j} \in [t_j, t_{j+1}]$ und $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$

gleichmäßige Stetigkeit von p' auf $[a, b] \implies$

$$|p(t_{j+1}) - p(t_j)| = |p'(t_j)|\Delta t_j + r_j\Delta t_j$$

mit $|r_j| < \varepsilon$ für $|\Delta t_j| < \delta$

$$\int_C f \approx \sum_j f(p(t_j)) |p'(t_j)| \Delta t_j + R$$

$$|R| \leq \sum_j |f(p(t_j))| \Delta t_j |r_j| \leq \max |f| (b-a) \varepsilon$$

Verfeinerung der Partition \implies Riemann-Summe \rightarrow
 $\int_a^b f(p(t)) |p'(t)| dt$

Approximation unabhängig von der Parametrisierung

Beispiel

Berechnung des Integrals der Funktion

$$f(x, y, z) = \exp(-z)$$

entlang n Windungen der Schraublinie C mit der Parametrisierung

$$C: \quad p(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad p'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi n]$$

$$|p'(t)| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \int_C f &= \int_0^{2\pi n} \exp(-t) \sqrt{2} \, dt \\ &= \sqrt{2} [-\exp(-t)]_0^{2\pi n} = \sqrt{2} (1 - \exp(-2\pi n)) \end{aligned}$$

Eigenschaften des Kurvenintegrals

Das Kurvenintegral $\int_C f$ ist linear in f und additiv bzgl. C :

- $\int_C \alpha f + \beta g = \alpha \int_C f + \beta \int_C g$
- $\int_C f dC = \int_{C_1} f + \int_{C_2} f,$

falls $C = C_1 \cup C_2$ und C_1 und C_2 bis auf isolierte Punkte disjunkt sind.

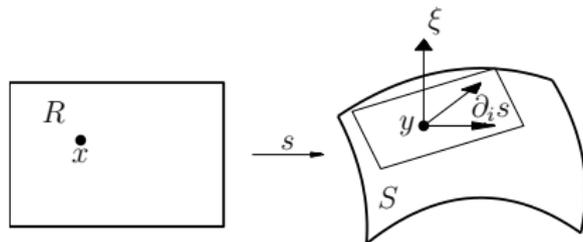
Es hängt nicht von der Parametrisierung ab und ist (im Gegensatz zum Arbeitsintegral und komplexen Kurvenintegral) ebenfalls unabhängig von der Orientierung der Kurve.

Parametrisierung einer Fläche

Eine stetig differenzierbare Parametrisierung

$$R \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto s(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

über einem regulären Bereich R beschreibt ein reguläres $(n-1)$ -dimensionales Flächenstück $S = s(R) \subset \mathbb{R}^n$, wenn s im Inneren von R injektiv ist und die Vektoren $\partial_1 s(x), \dots, \partial_{n-1} s(x)$ für alle $x \in R^\circ$ linear unabhängig sind.



Der bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmte Einheitsvektor ξ , der zu der durch $\partial_1 s(x), \dots, \partial_{n-1} s(x)$ aufgespannten Tangentialebene orthogonal ist, wird als Flächennormale bezeichnet. Er bildet zusammen mit den Vektoren $\partial_i s(x)$ eine Basis von \mathbb{R}^n .

Flächenintegral

Das Integral einer stetigen Funktion f über einem regulären Flächenstück S mit Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto s(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad x \in R,$$

und Flächennormale ξ mit $|\xi| = 1$ ist als

$$\int_S f \, dS = \int_R (f \circ s) |\det(\partial_1 s, \dots, \partial_{n-1} s, \xi)| \, dR$$

definiert und unabhängig von der gewählten Parametrisierung.

Der Betrag der Determinante ist der Skalierungsfaktor der Flächenelemente:

$$dS = |\det(\partial_1 s, \dots, \partial_{n-1} s, \xi)| \, dR.$$

Als Spezialfall erhält man für $f = 1$ den Flächeninhalt von S .

Die Glattheitsvoraussetzungen an f und s können abgeschwächt werden, indem man das Integral über einen geeigneten Grenzprozess definiert.

Darüber hinaus kann eine Fläche aus mehreren Flächenstücken zusammengesetzt sein. Das Flächenintegral ist dann die Summe der Integrale über die einzelnen Flächenstücke.

Beispiel

Integration der Funktion

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

auf dem durch

$$(r, \varphi) \mapsto s(r, \varphi) = \begin{pmatrix} (1+r) \cos \varphi \\ (1+r) \sin \varphi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{1}{2}$$

parametrisierten Teilstück einer Wendeltreppe S



Tangentenvektoren:

$$s_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_\varphi = \begin{pmatrix} -(1+r) \sin \varphi \\ (1+r) \cos \varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

Orthogonalität \implies

$$|\det(s_r, s_\varphi, \xi)| = |s_r| |s_\varphi| = \sqrt{(1+r)^2 + 1}$$

Einsetzen in Definition des Flächenintegrals \rightsquigarrow

$$\begin{aligned} \int_S f dS &= \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} (1+r) \sqrt{(1+r)^2 + 1} dr d\varphi \\ &= 2\pi \int_{-1/2}^{1/2} (1+r) \sqrt{(1+r)^2 + 1} dr \\ &= \frac{2\pi}{3} \left[\left((1+r)^2 + 1 \right)^{\frac{3}{2}} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} \left(13^{3/2} - 5^{3/2} \right) \end{aligned}$$

Beispiel

Flächenelement des Graphen S einer Funktion $z(x, y)$ sowie Integration über S

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy$$

Spezialisierung der allgemeinen Definition für die Parametrisierung

$$(x, y) \mapsto s(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x, y) \end{pmatrix}$$

mit Flächennormale ξ parallel zu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x \end{pmatrix}}_{s_x} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y \end{pmatrix}}_{s_y} = \begin{pmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\xi| = 1, \xi \perp s_x, s_y \quad \implies \quad |\det(s_x, s_y, \xi)| = |s_x \times s_y| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$$

z.B.

$$z(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 \quad \implies \quad dS = \sqrt{1 + 4x^2 + y^2} dx dy$$

Integration von $f(x, y) = xy$ über das über dem Rechteck $[0, 1] \times [0, 2]$ liegende Flächenstück \rightsquigarrow

$$\begin{aligned} \int_S f dS &= \int_0^1 \int_0^2 xy \sqrt{1 + 4x^2 + y^2} dy dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \left[x(1 + 4x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \left(x(5 + 4x^2)^{\frac{3}{2}} - x(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{20} (5 + 4x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{20} (1 + 4x^2)^{\frac{5}{2}} \right) \right]_0^1 = \frac{61}{15} - \frac{5}{6} \sqrt{5} \end{aligned}$$

Volumenelement in Zylinderkoordinaten

Für die Koordinatentransformation

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z$$

ist

$$dx dy dz = \varrho d\varrho d\varphi dz.$$

Insbesondere gilt damit für das Integral einer Funktion f auf einem Zylinder $Z : 0 \leq \varrho \leq \varrho_0, 0 \leq z \leq z_0$

$$\int_Z f = \int_0^{z_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\varrho_0} f(\varrho, \varphi, z) \varrho d\varrho d\varphi dz,$$

und, falls f nur vom Abstand ϱ zur Symmetrieachse abhängt,

$$\int_Z f = 2\pi z_0 \int_0^{\varrho_0} f(\varrho) \varrho d\varrho.$$

Das Flächenelement für ebene Polarkoordinaten ($x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$) transformiert sich analog: $dx dy = r dr d\varphi$.

Beweis

Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation $(x, y, z) = g(\varrho, \varphi, z)$

$$g' = (g_\varrho, g_\varphi, g_z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

orthogonale Spalten (lokal orthogonale Transformation) \implies

$$|\det g'| = |g_\varrho| |g_\varphi| |g_z| = 1 \cdot \varrho \cdot 1 = \varrho$$

Beispiel

Integral der Gauß-Funktion:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$$

berechne zunächst das Quadrat des Integrals:

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2 - y^2) dx dy \end{aligned}$$

Polarkoordinaten \rightsquigarrow

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \exp(-r^2) r \, dr \, d\varphi = 2\pi \left[-\frac{1}{2} \exp(-r^2) \right]_0^{\infty} = \pi$$

Volumenelement in Kugelkoordinaten

Für die Koordinatentransformation

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta$$

ist

$$dx dy dz = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi.$$

Insbesondere gilt damit für das Integral einer Funktion f auf einer Kugel $K : 0 \leq r \leq R$

$$\int_K f = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R f(r, \vartheta, \varphi) r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi.$$

Für eine radialsymmetrische Funktion ist $\int_K f = 4\pi \int_0^R f(r) r^2 dr$.

Beweis

Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation $(x, y, z) = g(r, \vartheta, \varphi)$

$$g' = (g_r, g_\vartheta, g_\varphi) = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

orthogonale Spalten (lokal orthogonale Transformation) \rightsquigarrow
Funktionaldeterminante

$$|\det g'| = |g_r| |g_\vartheta| |g_\varphi| = 1 \cdot r \cdot r \sin \vartheta = r^2 \sin \vartheta$$

Integration über ϑ und φ bei einer radialsymmetrischen Funktion f :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 2\pi [-\cos \vartheta]_0^\pi = 4\pi$$

Vorfaktor bei der Berechnung von $\int_K f \hat{=} \text{Flächeninhalt der Einheitskugeloberfläche}$

Beispiel

Integral von r^α über die Kugel $K : r \leq 1$ sowie über deren Komplement

(i) Integral über K :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 r^2 r^\alpha \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = 4\pi \int_0^1 r^{\alpha+2} \, dr$$

existiert für $\alpha > -3$ mit Wert $4\pi \left[\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3} \right]_0^1 = \frac{4\pi}{\alpha+3}$

(ii) Integral über $\mathbb{R}^3 \setminus K$:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_1^\infty r^\alpha r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = 4\pi \int_1^\infty r^{\alpha+2} \, dr$$

existiert für $\alpha < -3$ mit Wert $4\pi \left[\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3} \right]_1^\infty = \frac{-4\pi}{\alpha+3}$

Beispiel

Sauerstoffmenge in der Atmosphäre:

barometrische Höhenformel \rightsquigarrow Druck in der Höhe h über Nullniveau

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}}$$

mit $p_0 = 101300 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ dem Normaldruck, $\rho_0 = 0.150 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ der Sauerstoffdichte auf Nullniveau (21% der Luft sind Sauerstoff) und $g = 9.80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ der Erdbeschleunigung

ideale Gasgleichung \rightsquigarrow Dichte

$$\rho = \frac{p}{R_s T}$$

mit $R_s = \frac{k_B}{m_{\text{Molekül}}} = 519 \frac{\text{Nm}}{\text{K kg}}$ der spezifischen Gaskonstante für Sauerstoff und T der in Kelvin gemessenen Temperatur (als konstant -3°C , also $T = 270\text{K}$, angenommen)

↪ Näherung für die Gesamtmasse des Sauerstoffs in der Atmosphäre

$$M = \int_V \rho \, dV = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^\infty \frac{1}{R_s T} p_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}} r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta$$

mit $r_0 = 6.37 \cdot 10^6 \text{m}$ dem Erdradius

Substitution von $h = r - r_0$ und Integration über ϑ und φ ↪

$$M = 4\pi \frac{p_0}{R_s \cdot T} e^{\frac{\rho_0 g}{p_0} r_0} \int_{r_0}^\infty e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} r} r^2 \, dr$$

zweifache partielle Integration ↪

$$\int_{r_0}^\infty e^{-cr} r^2 \, dr = \left[-\frac{r^2}{c} e^{-cr} \right]_{r_0}^\infty + \left[-\frac{2r}{c^2} e^{-cr} \right]_{r_0}^\infty + \left[-\frac{2}{c^3} e^{-cr} \right]_{r_0}^\infty$$

$$(c = \frac{\rho_0 g}{p_0})$$

insgesamt

$$M = \frac{4\pi p_0}{R_s T} (c^{-1} r_0^2 + 2c^{-2} r_0 + 2c^{-3}) = 2.59 \cdot 10^{19} \text{kg}$$

Zum Vergleich

- Erdmasse: $6 \cdot 10^{24} \text{kg}$ ($2.3 \cdot 10^5 M$)
- Mondmasse: $7.4 \cdot 10^{22} \text{kg}$ ($2.9 \cdot 10^3 M$)

Flächenelement in Zylinderkoordinaten

Das Flächenelement für einen durch

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

parametrisierten Mantel S eines Zylinders mit Radius ϱ ist

$$dS = \varrho d\varphi dz.$$

Damit gilt für das Integral einer Funktion f in Zylinderkoordinaten

$$\int_S f dS = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_0^{2\pi} f(\varrho, \varphi, z) \varrho d\varphi dz.$$

Beweis

Orthogonalität der Tangentenvektoren

$$s_\varphi = \begin{pmatrix} -\varrho \sin \varphi \\ \varrho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

↪

$$|\det(s_\varphi, s_z, \xi)| = |s_\varphi| |s_z| = \varrho$$

als Skalierungsfaktor für das Flächenelement

Flächenelement in Kugelkoordinaten

Das Flächenelement für eine durch

$$\begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} R \sin \vartheta \cos \varphi \\ R \sin \vartheta \sin \varphi \\ R \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

parametrisierte Sphäre mit Radius R ist

$$dS = R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta, d\varphi$$

Damit gilt für das Integral einer Funktion f in Kugelkoordinaten

$$\int_S f \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(R, \vartheta, \varphi) R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta d\varphi$$

Beweis

Orthogonalität der Tangentenvektoren

$$s_{\vartheta} = \begin{pmatrix} R \cos \vartheta \cos \varphi \\ R \cos \vartheta \sin \varphi \\ -R \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad s_{\varphi} = \begin{pmatrix} -R \sin \vartheta \sin \varphi \\ R \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

↪

$$|\det(s_{\vartheta}, s_{\varphi}, \xi)| = |s_{\vartheta}| |s_{\varphi}| = R^2 \sin \vartheta$$

als Skalierungsfaktor für das Flächenelement

Beispiel

Bestimmung des Schwerpunkts S einer Halbkugelschale

$$H: x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0,$$



bei konstanter Dichte

Symmetrie \implies x - und y -Koordinate des Schwerpunkts = 0

z -Koordinate:

$$s_z \text{ area}(H) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \underbrace{(\cos \vartheta)}_z \sin \vartheta \, d\vartheta d\varphi = 2\pi \left[\frac{\sin^2 \vartheta}{2} \right]_0^{\pi/2} = \pi$$

$$\text{area}(H) = 2\pi \implies s_z = \frac{1}{2}$$

Die Masse eines Körpers K mit Dichte $\varrho(x)$, $x \in K$, ist

$$m = \int_K \varrho(x) \, dK .$$

Speziell erhält man für $\varrho(x) = 1$ das Volumen V von K .

Die ν -te Koordinate des Massenschwerpunktes S berechnet sich gemäß

$$s_\nu = m^{-1} \int_K x_\nu \varrho(x) \, dK .$$

Für $\varrho(x) = 1$ ergibt sich

$$s_\nu = V^{-1} \int_K x_\nu \, dK ,$$

und S wird als geometrischer Schwerpunkt oder auch einfach als Schwerpunkt bezeichnet.

Beispiel

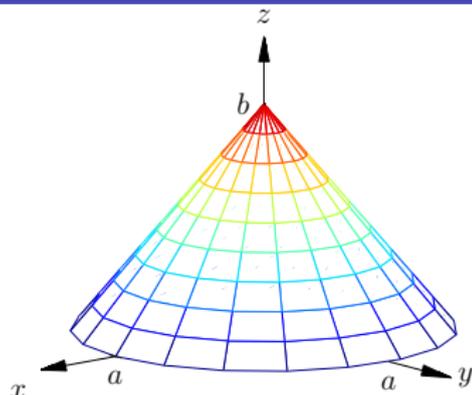
Schwerpunkt eines Kegels K :

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$0 \leq \varrho \leq \frac{a}{b}(b - z),$$

$$0 \leq z \leq b$$

mit Grundkreisradius a und Höhe b .



Volumen $V = \frac{\pi}{3}a^2b$

Symmetrie \rightsquigarrow x- und y-Koordinate des Schwerpunkts Null

z-Koordinate:

$$s_z = \frac{1}{V} \int_K z \, dK$$

Transformation auf Zylinderkoordinaten \rightsquigarrow

$$\begin{aligned}V_{S_z} &= \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \int_0^{2\pi} \rho z \, d\varphi d\rho dz \\ &= 2\pi \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \rho z \, d\rho dz \\ &= \pi \int_0^b z \left(\frac{a}{b}(b-z) \right)^2 dz \\ &= \frac{\pi}{12} a^2 b^2\end{aligned}$$

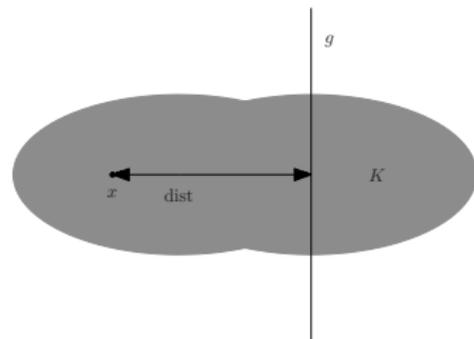
\rightsquigarrow Schwerpunkt: $S = (0, 0, b/4)$

Trägheitsmoment

Das Trägheitsmoment eines Körpers K mit Dichte $\varrho(x)$, $x \in K$, um eine Achse g ist

$$I = \int_K \text{dist}(x, g)^2 \varrho(x) \, dK,$$

wobei dist die Abstandsfunktion bezeichnet.



Beispiel

Trägheitsmoment einer Hohlkugel

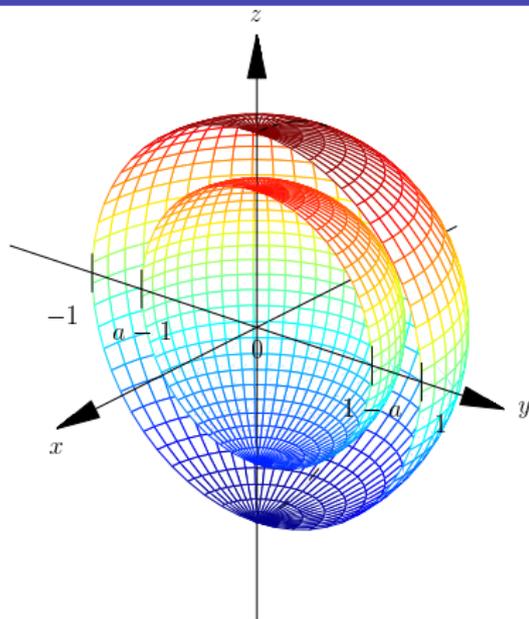
K :

$$1 - a \leq r \leq 1,$$

$$0 \leq \vartheta \leq \pi,$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

bei konstanter Dichte ρ



Symmetrie \rightsquigarrow berechne das Trägheitsmoment um die z-Achse g

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{1-a}^1 \underbrace{\rho(r \sin \vartheta)}_{\text{dist}((x,y,z),g)}^2 \underbrace{(r^2 \sin \vartheta)}_{dK} dr d\vartheta d\varphi \\
 &= \frac{2\pi\rho}{5} (1 - (1-a)^5) \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta \\
 &= \frac{2\pi\rho}{5} (1 - (1-a)^5) \left[-\cos \vartheta + \frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right]_0^\pi \\
 &= \frac{8\pi\rho}{15} (1 - (1-a)^5)
 \end{aligned}$$

Dichte ρ bei Masse 1 der Hohlkugel \iff

$$1 = \int_K \rho = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{1-a}^1 \rho r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = \frac{4\pi\rho}{3} (1 - (1-a)^3)$$

\implies

$$I(a) = \frac{2(1 - (1-a)^5)}{5(1 - (1-a)^3)}$$

Trägheitsmoment der ganzen Kugel

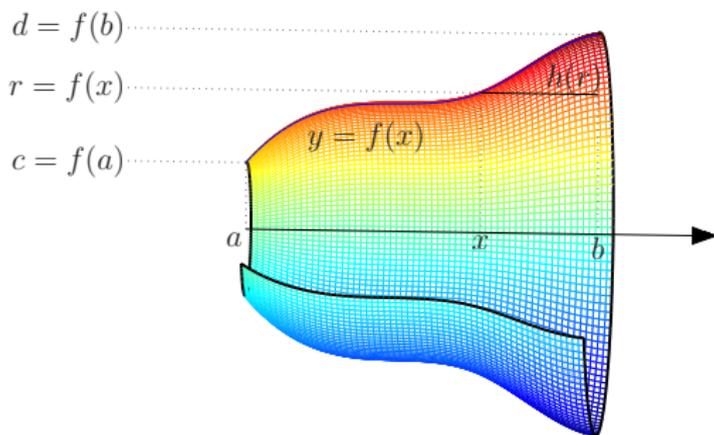
$$I(1) = 2/5$$

Grenzwert für $a = 0$: $I(0) = 2/3$ (Regel von L'Hôpital)

Volumen von Rotationskörpern

Das Volumen V des durch Rotation des Funktionsgraphen $r = f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$, um die x -Achse erzeugten Körpers lässt sich durch Integration über die kreisförmigen Querschnitte berechnen:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$



Bei monotoner Radiusfunktion kann man alternativ über die Zylindermäntel integrieren:

$$V = \pi c^2(b - a) + 2\pi \int_c^d rh(r) dr,$$

wobei c bzw. d der minimale bzw. maximale Radius r und $h(r)$ die Höhe des in dem Körper enthaltenen Zylindermantels mit Radius r sind.

Partition Δ mit Intervallen $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1 \dots n$

Einschluss des Volumens durch einen Zylinder mit minimalem Radius $f(\xi_i)$
und einem Zylinder mit maximalem Radius $f(\eta_i)$

\rightsquigarrow Abschätzung für das Gesamtvolumen

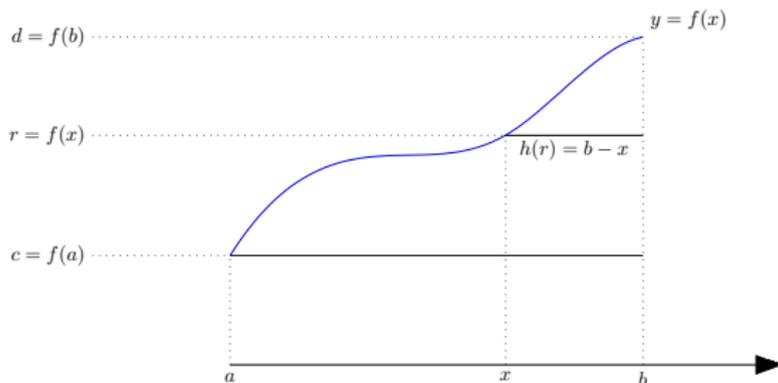
$$\pi \sum_{i=1}^n f(\xi_i)^2 \Delta x_i \leq V \leq \pi \sum_{i=1}^n f(\eta_i)^2 \Delta x_i$$

mit $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Konvergenz der beiden Riemann-Summen \implies

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

(ii) zweite Formel (monoton wachsendes f):



Umformung der behaupteten Formel durch Substitution

$$r = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(r), \quad dr = f'(x) dx$$

↪

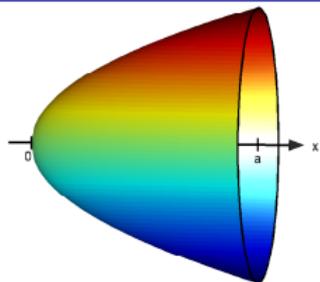
$$\begin{aligned} 2\pi \int c = f(a)^{d=f(b)} h(r) r \, dr &= \pi \int_a^b \underbrace{(b-x)}_u \underbrace{2f(x)f'(x)}_{v'} \, dx \\ &= \pi [(b-x)f(x)^2]_a^b + \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \\ &= \underbrace{-\pi(b-a)c^2}_{\text{innerer Zylinder}} + \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \end{aligned}$$

⇒ Äquivalenz zur ersten Formel

(iii) analog: monoton fallendes f

Beispiel

Volumen eines Paraboloids, erzeugt durch Rotation der Kurve $r = \sqrt{x}$ um die x -Achse



(i) horizontale Integration über Kreisscheiben (Radius $f(x)$):

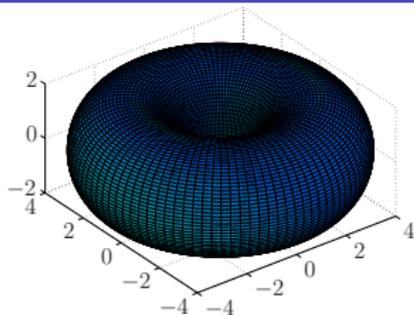
$$\pi \int_0^a \underbrace{(\sqrt{x})^2}_{f(x)} dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{1}{2} \pi a^2$$

(ii) vertikale Integration über Zylindermäntel (Höhe $h(r)$):

$$2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r \underbrace{(a - r^2)}_{h(r)} dr = 2\pi \left[\frac{ar^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \pi a^2$$

Beispiel

Volumen eines Torus, erzeugt durch Rotation einer Kreisscheibe mit Radius r um eine Achse im Abstand R vom Mittelpunkt



Differenz zweier Rotationskörper ($\pi \int (r_+^2 - r_-^2)$) \rightsquigarrow

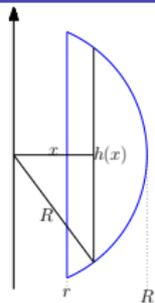
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r \left(R + \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx - \pi \int_{-r}^r \left(R - \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx \\ &= 4\pi \int_{-r}^r R \sqrt{r^2 - x^2} dx \end{aligned}$$

Substitution $x = r \sin \varphi$, $dx = r \cos \varphi d\varphi \rightsquigarrow$

$$V = 4\pi Rr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi r \cos \varphi d\varphi = 4\pi Rr^2 \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 Rr^2$$

Beispiel

Volumen einer Kugel mit Radius R mit ausgestanztem Zylinder um die vertikale Achse mit Radius r



Integration über Zylindermäntel mit Radius x , $r \leq x \leq R$:

$$V = 2\pi \int_r^R xh(x) dx, \quad h(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}$$

$R = 5$, $r = 3 \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_3^5 2x\sqrt{25 - x^2} dx = 2\pi \left[-\frac{2}{3} (25 - x^2)^{3/2} \right]_3^5 \\ &= \frac{4}{3}\pi(25 - 9)^{3/2} = \frac{256}{3}\pi \end{aligned}$$

Hauptsatz für Mehrfachintegrale

Für einen regulären Bereich $V \subset \mathbb{R}^n$ mit regulärem $(n - 1)$ -dimensionalem Rand ∂V und nach außen gerichteter Einheitsnormale ξ gilt für eine stetig differenzierbare Funktion f

$$\int_V \partial_\nu f = \int_{\partial V} f \xi_\nu, \quad \nu = 1, \dots, n.$$

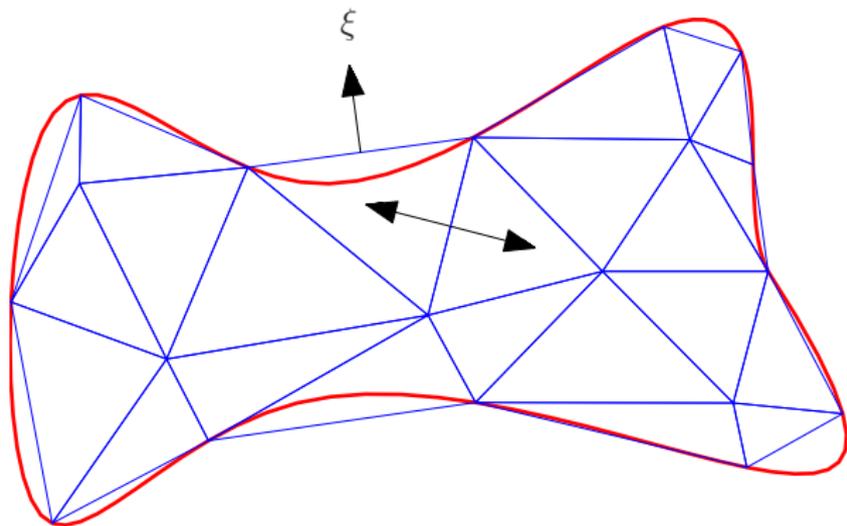
Fasst man diese Gleichungen zusammen, so erhält man die vektorielle Identität

$$\int_V \text{grad } f = \int_{\partial V} f \xi.$$

Die Glattheitsvoraussetzungen können abgeschwächt werden, indem man die Integrale über geeignete Grenzprozesse definiert.

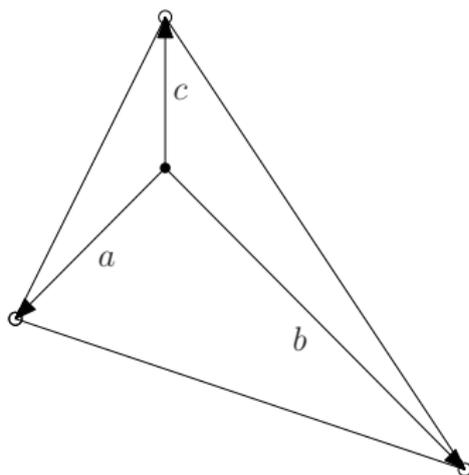
Beweis

Approximation durch eine stückweise lineare Funktion auf einer Triangulierung von V



Aufhebung von Randtermen im Inneren \rightsquigarrow nur ein Dreieck bzw. Tetraeder zu betrachten

dreidimensionaler Fall



f : 1 im Ursprung •

0 an anderen Eckpunkten ◦

f linear: bestimmt durch Werte an den Eckpunkten

Linearität \implies o.B.d.A f null an 3 Eckpunkten

(i) linke Seite $\int_V \text{grad } f$:

bestimme $g = \text{grad } f$ aus Richtungsableitungen

$$a^t g = b^t g = c^t g = 0 - 1 = -1$$

Cramersche Regel \implies

$$\begin{aligned} g_1 &= \begin{vmatrix} -1 & a_2 & a_3 \\ -1 & b_2 & b_3 \\ -1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} / \det(a, b, c) \\ &= [-b_2 c_3 - c_2 a_3 - a_2 b_3 + c_2 b_3 + a_2 c_3 + b_2 a_3] / (6 \text{ vol } V) \end{aligned}$$

analoge Berechnung von g_2, g_3

\rightsquigarrow erste Komponente der linken Seite

$$\left(\int_V \text{grad } f \right)_1 = \frac{1}{6} [\dots]$$

(ii) rechte Seite $\int_{\partial V} f \xi$:

betrachte von a, b aufgespannte Seitenfläche

$$S : (s, t) \mapsto sa + tb$$

Normale: $\xi = -a \times b / |a \times b|$

Flächenelement $dS = |a \times b| dt ds$

$$f(sa + tb) = 1 - s - t \quad \implies$$

$$\int_S f \xi = (b \times a) \int_0^1 \int_0^{1-s} 1 - s - t dt ds = \frac{1}{6} (b \times a)$$

analoge Berechnung für die von b, c bzw. c, a aufgespannten Seitenflächen;
 f null auf vierter Seitenfläche \implies

$$\int_{\partial V} f \xi = \frac{1}{6} (b \times a + c \times b + a \times c)$$

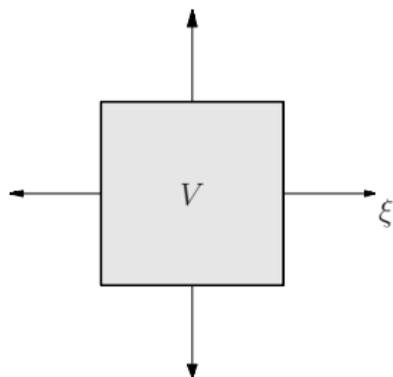
Übereinstimmung der ersten Komponente mit [...]

Beispiel

Hauptsatz für das Quadrat $V = [0, 1]^2$:

$$\int_0^1 \int_0^1 \text{grad } f(x, y) \, dx dy = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(1, y) - f(0, y) \, dy \\ \int_0^1 f(x, 1) - f(x, 0) \, dx \end{pmatrix}$$

$\xi = (\pm 1, 0), (0, \pm 1), \xi_v$ jeweils nur auf zwei gegenüberliegenden
Randkomponenten $\neq 0$



Komponenten der Identität \rightsquigarrow univariater Hauptsatz

z.B.

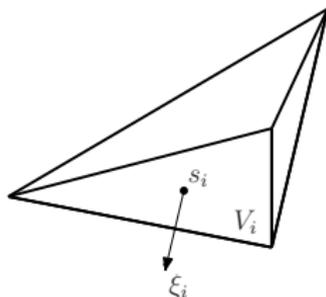
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f_x(x, y) dx \right) dy = \int_0^1 [f(x, y)]_{x=0}^{x=1} dy$$

Beispiel

Illustration des Hauptsatzes für einen Simplex $V \subseteq \mathbb{R}^n$, begrenzt durch $(n - 1)$ -dimensionale

Simplizes V_i , $i = 1, \dots, n + 1$

ξ_j : nach außen gerichtete Einheitsnormale, s_j : Schwerpunkt von V_j



(i) konstante Funktion $f(x) = b$:

Hauptsatz \implies

$$0 = \sum_i \text{vol}_{n-1}(V_i) \xi_i$$

(ii) lineare Funktion $f(x) = a^t x$:

Hauptsatz \implies

$$\text{vol}_n(V) a = \sum_i \text{vol}_{n-1}(V_i) (a^t s_i) \xi_i ,$$

denn für einen Simplex mit Schwerpunkt s ist die Quadraturformel

$$\int_S f \approx \text{vol}(S) f(s)$$

für lineare Funktionen f exakt

Beispiel

Illustration des Hauptsatzes für Kugel mit Radius R und Oberfläche $S = \partial V$

Volumen- und Flächenelement (Kugelkoordinaten)

$$dV = r^2 \sin \vartheta \, dr d\vartheta d\varphi, \quad dS = R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta d\varphi$$

$$\xi = (x, y, z)^t / R$$

Hauptsatz \implies

$$\begin{aligned} & \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \text{grad } f(r, \vartheta, \varphi) r^2 \sin \vartheta \, d\varphi d\vartheta dr \\ &= R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(R, \vartheta, \varphi) \underbrace{\begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}}_{\xi} \sin \vartheta \, d\varphi d\vartheta \end{aligned}$$

z.B.:

$$f(x, y, z) = xz^2 = R^3 \sin \vartheta \cos \varphi \cos^2 \vartheta$$

mit

$$\text{grad } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z^2 \\ 0 \\ 2xz \end{pmatrix}, \quad f(x, y, z)\xi = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x^2 z^2 \\ xyz^2 \\ xz^3 \end{pmatrix}$$

↪ erste Komponente des Hauptsatzes

$$\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (r \cos \vartheta)^2 r^2 \sin \vartheta \, d\varphi d\vartheta dr = \frac{4}{15} \pi R^5$$
$$R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} (R \sin \vartheta \cos \varphi)^2 (R \cos \vartheta)^2 \sin \vartheta \, d\varphi d\vartheta = \frac{4}{15} \pi R^5$$

Symmetrie \implies Verschwinden der letzten beiden Komponenten

Partielle Integration

Für stetig differenzierbare Funktionen f und g auf einem regulären Bereich $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit regulärem $(n - 1)$ -dimensionalem Rand $S = \partial V$ gilt

$$\int_V f (\partial_\nu g) = \int_S f g \xi_\nu - \int_V (\partial_\nu f) g,$$

wobei ξ die nach außen gerichtete Einheitsnormale von S bezeichnet. Verschwinden f und g ausserhalb einer beschränkten Menge, so folgt insbesondere, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} f (\partial_\nu g) = - \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_\nu f) g$$

und allgemeiner, für glatte Funktionen,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g \partial^\alpha f = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f \partial^\alpha g.$$

Beweis

Hauptsatz für Mehrfachintegrale \implies

$$\int_V \partial_\nu(fg) = \int_{\partial V} (fg)\xi_\nu$$

für eine beliebige partielle Ableitung ∂_ν

Produktregel,

$$\partial_\nu(fg) = g\partial_\nu f + f\partial_\nu g,$$

\rightsquigarrow behauptete Identität

kein Randterm, falls f und g auf S verschwinden \rightsquigarrow Identität mit $V = \mathbb{R}^n$

Iteration der Identität \rightsquigarrow

Formel für partielle Integration höherer Ableitungen

Greensche Formeln

Für einen regulären Bereich $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit regulärer Randfläche $S = \partial V$ gilt für zweimal stetig differenzierbare Funktionen f und g

$$\int_S f \partial_{\perp} g = \int_V (\operatorname{grad} f)^t \operatorname{grad} g + f \Delta g,$$

wobei $\partial_{\perp} g$ die Ableitung in Richtung der nach außen zeigenden Einheitsnormalen ξ ist, d.h. $\partial_{\perp} g = \xi^t \operatorname{grad} g$.

Insbesondere folgt für $f = 1$

$$\int_S \partial_{\perp} g = \int_V \Delta g.$$

Eine symmetrische Variante der auf Green zurückgehenden Identität ist

$$\int_S f \partial_{\perp} g - g \partial_{\perp} f = \int_V f \Delta g - g \Delta f.$$

Bei beiden Greenschen Formeln können die Glattheitsvoraussetzungen abgeschwächt werden, indem man die Integrale über geeignete Grenzprozesse definiert.

Beweis

Hauptsatz für Mehrfachintegrale \implies

$$\int_S f \partial_\nu g \xi_\nu = \int_V \partial_\nu (f \partial_\nu g), \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Produktregel \implies

$$\partial_\nu (f \partial_\nu g) = (\partial_\nu f)(\partial_\nu g) + f(\partial_\nu \partial_\nu g)$$

und Summation über $\nu = 1, \dots, n \rightsquigarrow$ Greensche Formel

Vertauschen von f und $g \rightsquigarrow$

zweite Formel durch Subtraktion der Identitäten für

$$\int_S f \partial_\perp g \quad \text{und} \quad \int_S g \partial_\perp f$$

(Aufhebung der Produkte der Gradienten bei den Volumenintegralen)