Kurvenintegral

Das Integral einer stetigen Funktion f entlang einer Kurve C mit regulärer stetig differenzierbarer Parametrisierung

$$t \to p(t) \in \mathbb{R}^n, \quad |p'(t)| \neq 0,\ t \in [a, b]\,,$$

ist als

$$\int_C f = \int_a^b f(p(t))\,|p'(t)|\,\mathrm{d}t$$

definiert und unabhängig von der gewählten Parametrisierung.
Insbesondere erhält man für $f = 1$ die Länge der Kurve.

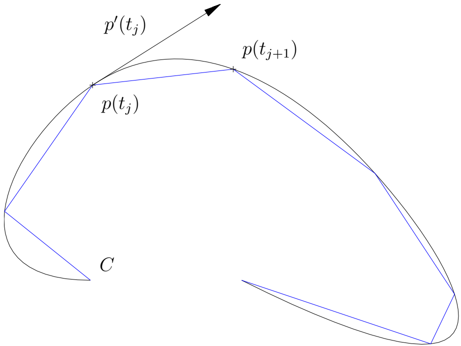
Die Glattheitsvoraussetzungen an f und p können abgeschwächt werden, indem man das Integral über einen geeigneten Grenzprozess erklärt.

Beweis

Begründung der Definition mit Hilfe von Riemann-Summen

$$\int_C f \approx \sum_j f(p_j) |p(t_{j+1}) - p(t_j)|$$

mit $\Delta: \ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_J = b$ einer Partition von $[a, b]$



Mittelwertsatz $\quad \Longrightarrow$

$$p(t_{j+1}) - p(t_j) = \begin{pmatrix} p_1'(\tau_{1,j}) \\ \vdots \\ p_n'(\tau_{n,j}) \end{pmatrix} \Delta t_j$$

mit $\tau_{\nu,j} \in [t_j, t_{j+1}]$ und $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$
gleichmäßige Stetigkeit von p' auf $[a, b]$ $\Longrightarrow$

$$|p(t_{j+1}) - p(t_j)| = |p'(t_j)|\Delta t_j + r_j \Delta t_j$$

mit $|r_j| < \varepsilon$ für $|\Delta t_j| < \delta$

$$\begin{aligned} \int_C f \quad &\approx \quad \sum_j f(p(t_j))\,|p'(t_j)|\Delta t_j + R \\ |R| \quad &\leq \quad \sum_j |f(p(t_j))|\Delta t_j\,|r_j| \leq \max|f|(b-a)\varepsilon \end{aligned}$$

Verfeinerung der Partition $\implies$ Riemann-Summe $\to$ $\int_a^b f(p(t))\,|p'(t)|\,\mathrm{d}t$

Approximation unabhängig von der Parametrisierung

Beispiel

Berechnung des Integrals der Funktion

$$f(x,y,z) = \exp(-z)$$

entlang n Windungen der Schraublinie C mit der Parametrisierung

$$C: \quad p(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad p'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi n]$$

$|p'(t)| = \sqrt{2} \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} \int_C f &= \int_0^{2\pi n} \exp(-t)\sqrt{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}\,[-\exp(-t)]_0^{2\pi n} = \sqrt{2}\,(1-\exp(-2\pi n)) \end{aligned}$$

Eigenschaften des Kurvenintegrals

Das Kurvenintegral $\int_C f$ ist linear in f und additiv bzgl. C:

- $\displaystyle\int_C \alpha f + \beta g = \alpha \int_C f + \beta \int_C g$
- $\displaystyle\int_C f \, dC = \int_{C_1} f + \int_{C_2} f \,,$

falls $C = C_1 \cup C_2$ und C_1 und C_2 bis auf isolierte Punkte disjunkt sind.

Es hängt nicht von der Parametrisierung ab und ist (im Gegensatz zum Arbeitsintegral und komplexen Kurvenintegral) ebenfalls unabängig von der Orientierung der Kurve.