Hauptsatz für Mehrfachintegrale

Für einen regulären Bereich $V \subset \mathbb{R}^n$ mit regulärem $(n-1)$-dimensionalem Rand ∂V und nach außen gerichteter Einheitsnormale ξ gilt für eine stetig differenzierbare Funktion f

$$\int_V \partial_\nu f = \int_{\partial V} f\, \xi_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, n\,.$$

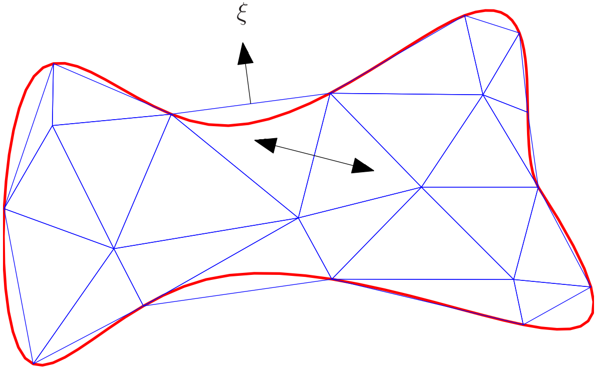
Fasst man diese Gleichungen zusammen, so erhält man die vektorielle Identität

$$\int_V \operatorname{grad} f = \int_{\partial V} f\, \xi\,.$$

Die Glattheitsvoraussetzungen können abgeschwächt werden, indem man die Integrale über geeignete Grenzprozesse definiert.

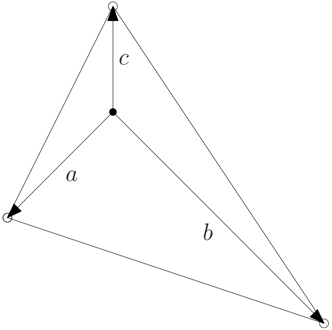
Beweis

Approximation durch eine stückweise lineare Funktion auf einer Triangulierung von V



Aufhebung von Randtermen im Inneren $\rightsquigarrow$ nur ein Dreieck bzw. Tetraeder zu betrachten

dreidimensionaler Fall



f : 1 im Ursprung $\bullet$

0 an anderen Eckpunkten $\circ$

f linear: bestimmt durch Werte an den Eckpunkten

Linearität $\implies$ o.B.d.A f null an 3 Eckpunkten

(i) linke Seite $\int_V \operatorname{grad} f$:
bestimme $g = \operatorname{grad} f$ aus Richtungsableitungen

$$a^{\mathrm{t}} g = b^{\mathrm{t}} g = c^{\mathrm{t}} g = 0 - 1 = -1$$

Cramersche Regel $\quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} g_1 &= \begin{vmatrix} -1 & a_2 & a_3 \\ -1 & b_2 & b_3 \\ -1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} / \det(a, b, c) \\ &= [-b_2 c_3 - c_2 a_3 - a_2 b_3 + c_2 b_3 + a_2 c_3 + b_2 a_3] / (6 \operatorname{vol} V) \end{aligned}$$

analoge Berechnung von g_2, g_3
$\rightsquigarrow$ erste Komponente der linken Seite

$$\left(\int_V \operatorname{grad} f \right)_1 = \frac{1}{6} [\ldots]$$

(ii) rechte Seite $\int_{\partial V} f\,\xi$:
betrachte von a,b aufgespannte Seitenfläche

$$S : (s,t) \mapsto sa + tb$$

Normale: $\xi = -a \times b / |a \times b|$
Flächenelement $\mathrm{d}S = |a \times b| \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s$
$f(sa + tb) = 1 - s - t \quad \Longrightarrow$

$$\int_S f\xi = (b \times a) \int_0^1 \int_0^{1-s} 1 - s - t \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = \frac{1}{6}(b \times a)$$

analoge Berechnung für die von b, c bzw. c, a aufgespannten Seitenflächen;
f null auf vierter Seitenfläche $\quad \Longrightarrow$

$$\int_{\partial V} f\xi = \frac{1}{6}\,(b \times a + c \times b + a \times c)$$

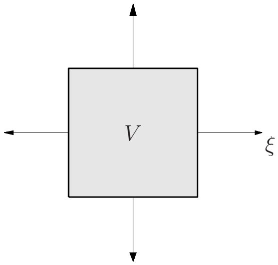
Übereinstimmung der ersten Komponente mit [...]

Beispiel

Hauptsatz für das Quadrat $V = [0,1]^2$:

$$\int_0^1 \int_0^1 \operatorname{grad} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(1,y) - f(0,y)\,\mathrm{d}y \\ \int_0^1 f(x,1) - f(x,0)\,\mathrm{d}x \end{pmatrix}$$

$\xi = (\pm 1, 0),\ (0, \pm 1)\,, \xi_v$ jeweils nur auf zwei gegenüberliegenden Randkomponenten $\neq 0$



Komponenten der Identität $\quad\rightsquigarrow\quad$ univariater Hauptsatz

z.B.

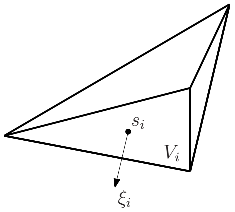
$$\int_0^1 \left(\int\limits_0^1 f_x(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left[f(x,y)\right]_{x=0}^{x=1}\,\mathrm{d}y$$

Beispiel

Illustration des Hauptsatzes für einen Simplex $V \subseteq \mathbb{R}^n$, begrenzt durch $(n-1)$-dimensionale

Simplizes V_i ,, $i = 1, \ldots, n+1$

ξ_i: nach außen gerichtete Einheitsnormale, s_i: Schwerpunkt von V_i



(i) konstante Funktion $f(x) = b$:
Hauptsatz $\implies$

$$0 = \sum_i \mathrm{vol}_{n-1}(V_i)\xi_i$$

(ii) lineare Funktion $f(x) = a^{\mathrm{t}}x$:
Hauptsatz $\implies$

$$\mathrm{vol}_n(V)\, a = \sum_i \mathrm{vol}_{n-1}(V_i)(a^{\mathrm{t}}s_i)\xi_i \ ,$$

denn für einen Simplex mit Schwerpunkt s ist die Quadraturformel

$$\int_S f \approx \mathrm{vol}(S) f(s)$$

für lineare Funktionen f exakt

Beispiel

Illustration des Hauptsatzes für Kugel mit Radius R und Oberfläche $S = \partial V$

Volumen- und Flächenelement (Kugelkoordinaten)

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi, \quad \mathrm{d}S = R^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$$

$\xi = (x, y, z)^{\mathrm{t}}/R$

Hauptsatz $\implies$

$$\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{grad} f(r, \vartheta, \varphi)\, r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}r$$

$$= R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(R, \vartheta, \varphi) \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}}_{\xi} \sin\vartheta \,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta$$

z.B.:

$$f(x,y,z) = xz^2 = R^3 \sin\vartheta \cos\varphi \cos^2\vartheta$$

mit

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} z^2 \\ 0 \\ 2xz \end{pmatrix}, \quad f(x,y,z)\xi = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} x^2 z^2 \\ xyz^2 \\ xz^3 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ erste Komponente des Hauptsatzes

$$\begin{aligned} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (r\cos\vartheta)^2\, r^2 \, \sin\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}r &= \frac{4}{15}\pi R^5 \\ R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{R}(R\sin\vartheta\cos\varphi)^2\,(R\cos\vartheta)^2 \, \sin\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta &= \frac{4}{15}\pi R^5 \end{aligned}$$

Symmetrie $\Longrightarrow$ Verschwinden der letzten beiden Komponenten