Greensche Formeln

Für einen regulären Bereich $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit regulärer Randfläche $S = \partial V$ gilt für zweimal stetig differenzierbare Funktionen f und g

$$\int_S f\,\partial_\perp g = \int_V (\operatorname{grad} f)^{\mathrm{t}}\ \operatorname{grad} g + f\,\Delta g\,,$$

wobei $\partial_\perp g$ die Ableitung in Richtung der nach außen zeigenden Einheitsnormalen ξ ist, d.h. $\partial_\perp g = \xi^{\mathrm{t}} \operatorname{grad} g$.
Insbesondere folgt für $f = 1$

$$\int\limits_S \partial_\perp g = \int\limits_V \Delta g\,.$$

Eine symmetrische Variante der auf Green zurückgehenden Identität ist

$$\int_S f\partial_\perp g - g\partial_\perp f = \int_V f\Delta g - g\Delta f\,.$$

Bei beiden Greenschen Formeln können die Glattheitsvoraussetzungen abgeschwächt werden, indem man die Integrale über geeignete Grenzprozesse definiert.

Beweis

Hauptsatz für Mehrfachintegrale $\quad \Longrightarrow$

$$\int\limits_S f\,\partial_\nu g\,\xi_\nu = \int\limits_V \partial_\nu\,(f\,\partial_\nu g)\,, \quad \nu = 1, \cdots, n\,.$$

Produktregel $\quad \Longrightarrow$

$$\partial_\nu(f\,\partial_\nu g) = (\partial_\nu f)(\partial_\nu g) + f(\partial_\nu\partial_\nu g)$$

und Summation über $\nu = 1, \ldots, n \quad \rightsquigarrow \quad$ Greensche Formel

Vertauschen von f und $g \quad \rightsquigarrow$
zweite Formel durch Substraktion der Identitäten für

$$\int_S f\partial_\perp g \quad \text{und} \quad \int_S g\partial_\perp f$$

(Aufhebung der Produkte der Gradienten bei den Volumenintegralen)