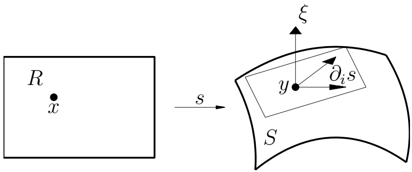
Parametrisierung einer Fläche

Eine stetig differenzierbare Parametrisierung

$$R \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto s(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

über einem regulären Bereich R beschreibt ein reguläres $(n-1)$-dimensionales Flächenstück $S = s(R) \subset \mathbb{R}^n$, wenn s im Inneren von R injektiv ist und die Vektoren $\partial_1 s(x), \ldots, \partial_{n-1} s(x)$ für alle $x \in R^\circ$ linear unabhängig sind.



Der bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmte Einheitsvektor ξ, der zu der durch $\partial_1 s(x), \ldots, \partial_{n-1} s(x)$ aufgespannten Tangentialebene orthogonal ist, wird als Flächennormale bezeichnet. Er bildet zusammen mit den Vektoren $\partial_i s(x)$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$.

Das Integral einer stetigen Funktion f über einem regulären Flächenstück S mit Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto s(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad x \in R\,,$$

und Flächennormale ξ mit $|\xi| = 1$ ist als

$$\int\limits_S f \,\mathrm{d}S = \int\limits_R (f \circ s)\,|\det(\partial_1 s, \ldots, \partial_{n-1} s, \xi)|\,\mathrm{d}R$$

definiert und unabhängig von der gewählten Parametrisierung.

Der Betrag der Determinante ist der Skalierungsfaktor der Flächenelemente:

$$\mathrm{d}S = |\det(\partial_1 s, \ldots, \partial_{n-1} s, \xi)|\,\mathrm{d}R\,.$$

Als Spezialfall erhält man für $f = 1$ den Flächeninhalt von S.

Die Glattheitsvoraussetzungen an f und s können abgeschwächt werden, indem man das Integral über einen geeigneten Grenzprozess definiert.

Darüber hinaus kann eine Fläche aus mehreren Flächenstäcken zusammengesetzt sein. Das Flächenintegral ist dann die Summe der Integrale über die einzelnen Flächenstücke.

Beispiel

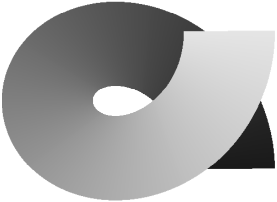
Integration der Funktion

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

auf dem durch

$$(r, \varphi) \mapsto s(r, \varphi) = \begin{pmatrix} (1 + r)\cos\varphi \\ (1 + r)\sin\varphi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\frac{1}{2} \le r \le \frac{1}{2}$$

parametrisierten Teilstück einer Wendeltreppe S



Tangentenvektoren:

$$s_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s_\varphi = \begin{pmatrix} -(1+r)\sin\varphi \\ (1+r)\cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

Orthogonalität $\quad \Longrightarrow$

$$|\det(s_r, s_\varphi, \xi)| = |s_r|\,|s_\varphi| = \sqrt{(1+r)^2+1}$$

Einsetzen in Definition des Flächenintegrals $\quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\int_S f\,\mathrm{d}S &= \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} (1+r)\sqrt{(1+r)^2+1}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi \int_{-1/2}^{1/2} (1+r)\sqrt{(1+r)^2+1}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{2\pi}{3}\left[\left((1+r)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12}\left(13^{3/2} - 5^{3/2}\right)
\end{aligned}$$

Beispiel

Flächenelement des Graphen S einer Funktion $z(x, y)$ sowie Integration über S

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Spezialisierung der allgemeinen Definition für die Parametrisierung

$$(x, y) \mapsto s(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x, y) \end{pmatrix}$$

mit Flächennormale ξ parallel zu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x \end{pmatrix}}_{s_x} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y \end{pmatrix}}_{s_y} = \begin{pmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$|\xi| = 1$, $\xi \perp s_x, s_y \quad \Longrightarrow \quad |\det(s_x, s_y, \xi)| = |s_x \times s_y| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$

z.B.

$$z(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}S = \sqrt{1 + 4x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Integration von $f(x, y) = xy$ über das über dem Rechteck $[0, 1] \times [0, 2]$ liegende Flächenstück $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\int\limits_S f\,\mathrm{d}S &= \int_0^1 \int_0^2 xy\sqrt{1 + 4x^2 + y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 \left[x(1 + 4x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \left(x(5 + 4x^2)^{\frac{3}{2}} - x(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{20}(5 + 4x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{20}(1 + 4x^2)^{\frac{5}{2}}\right)\right]_0^1 = \frac{61}{15} - \frac{5}{6}\sqrt{5}
\end{aligned}$$