

Flächenelement in Zylinderkoordinaten

Das Flächenelement für einen durch

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

parametrisierten Mantel S eines Zylinders mit Radius ϱ ist

$$dS = \varrho d\varphi dz.$$

Damit gilt für das Integral einer Funktion f in Zylinderkoordinaten

$$\int_S f dS = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_0^{2\pi} f(\varrho, \varphi, z) \varrho d\varphi dz.$$

Beweis

Orthogonalität der Tangentenvektoren

$$s_\varphi = \begin{pmatrix} -\varrho \sin \varphi \\ \varrho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

↷

$$|\det(s_\varphi, s_z, \xi)| = |s_\varphi| |s_z| = \varrho$$

als Skalierungsfaktor für das Flächenelement