Flächenelement in Kugelkoordinaten

Das Flächenelement für eine durch

$$\begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} R \sin\vartheta \cos\varphi \\ R \sin\vartheta \sin\varphi \\ R \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

parametrisierte Sphäre mit Radius R ist

$$\mathrm{d}S = R^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta, \mathrm{d}\varphi$$

Damit gilt für das Integral einer Funktion f in Kugelkoordinaten

$$\int_S f \, \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(R, \vartheta, \varphi) \, R^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi$$

Beweis

Orthogonalität der Tangentenvektoren

$$s_\vartheta = \begin{pmatrix} R\cos\vartheta\cos\varphi \\ R\cos\vartheta\sin\varphi \\ -R\sin\vartheta \end{pmatrix}, \qquad s_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$

$$|\det(s_\vartheta, s_\varphi, \xi)| = |s_\vartheta|\,|s_\varphi| = R^2\sin\vartheta$$

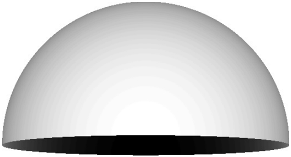
als Skalierungsfaktor für das Flächenelement

Beispiel

Bestimmung des Schwerpunkts S einer Halbkugelschale

$$H: \; x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0,$$

bei konstanter Dichte



Symmetrie $\implies$ x- und y-Koordinate des Schwerpunkts $= 0$

z-Koordinate:

$$s_z \; \text{area}(H) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\cos\vartheta)}_{z} \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi = 2\pi \left[\frac{\sin^2\vartheta}{2} \right]_0^{\pi/2} = \pi$$

$$\text{area}(H) = 2\pi \quad \implies \quad s_z = \frac{1}{2}$$