Vollständige Induktion

Aussageformen mit natürlichen Zahlen als Parametern kann man mit vollständiger Induktion beweisen. Ist $A(n)$ eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage, so sind dazu die folgenden beiden Beweisschritte durchzuführen.

- Induktionsanfang: Man zeigt, dass $A(1)$ richtig ist.
- Induktionsschluss: Man zeigt, dass aus der Annahme, dass $A(n)$ richtig ist (Induktionsvoraussetzung), folgt, dass auch $A(n+1)$ richtig ist, d.h.

$$A(n) \implies A(n+1)\,.$$

Dann ist gewährleistet, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Bei einem Induktionsbeweis wird sukzessive das Nächste aus dem Vorherigen gefolgert. Wird der Induktionsanfang nicht für $n_0 = 1$, sondern für ein $n_0 > 1$ durchgeführt, so gilt die Aussage nur für alle $n \geq n_0$.

Beispiel

Beweis der Formel für die Summe der Quadratzahlen,

$$A(n): \ \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\,,$$

mit vollständiger Induktion

- Induktionsanfang, Überprüfung von $A(1)$:

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \quad \checkmark$$

- Induktionsschluss, $A(n) \implies A(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{A(n)} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)\big[n(2n+1)+6(n+1)\big]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Verwendung der Induktionsvoraussetzung bei der zweiten Gleichheit

Beispiel

Anzahl der Spiele bei einem Tennis-Turnier (K.O.-System) mit 2^n Teilnehmern:

$$2^n - 1$$

($n = 7$ bei einem Grand-Slam)

(i) Beweis mit vollständiger Induktion:

- Induktionsanfang ($n = 1$):
  $2 = 2^1$ Teilnehmer $\quad\rightsquigarrow\quad$ $1 = 2^1 - 1$ Spiele $\quad\checkmark$
- Induktionsschluss ($n \to n + 1$):
  2^{n+1} Teilnehmer $\quad\rightsquigarrow\quad$ zwei Gruppen mit je 2^n Teilnehmern
  Induktionsvoraussetzung $\quad\Longrightarrow\quad$ $[2^n - 1]$ Spiele in jeder Gruppe
  zusätzliches letztes Spiel für die Sieger der beiden Gruppen $\quad\rightsquigarrow$

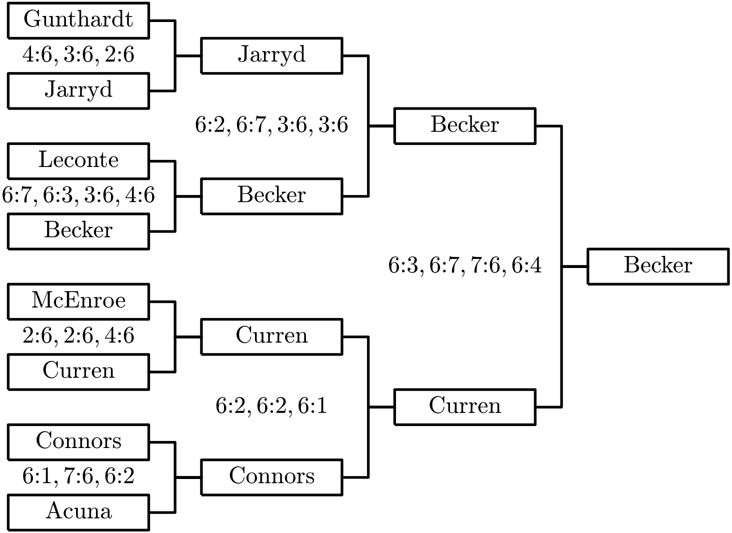
  $$2 \cdot [2^n - 1] + 1 = 2^{n+1} - 1$$

  Spiele bei 2^{n+1} Teilnehmern

(ii) Einfachere Argumentation ohne vollständige Induktion:
Beim K.O.-System verliert bis auf den Gewinner jeder Teilnehmer genau einmal; jedes Spiel hat genau einen Verlierer.
$\rightsquigarrow$ ein Spiel weniger als die Teilnehmerzahl

Alternativbeweis auch bei Teilnehmerfeldern beliebiger Größe anwendbar (z.B. bei Freilosen)

letzte 3 Runden des Wimbledon-Turniers von 1985



Beispiel

Paradox:

„Alle Mäuse sind grau“

Beweis mit vollständiger Induktion

- Induktionsschluss ($n \to n+1$):
  $n+1$ Mäuse: $M_1, \ldots, M_{n+1}$
  $M_1, \ldots, M_n$ und $M_2, \ldots, M_{n+1}$ jeweils grau nach Induktionsvoraussetzung
  $\implies \quad n+1$ Mäuse grau

Grund für den Widerspruch: fehlender Induktionsanfang
$\rightsquigarrow$ fehlerhafter Beweis (offensichtlich gibt es ebenfalls weiße Mäuse)