Verknüpfung von Abbildungen

Die Verknüpfung oder Komposition zweier Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ ist durch

$$a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)), \quad a \in A,$$

definiert und in dem Diagramm veranschaulicht.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & C \end{tikzcd}$$

Die Verknüpfung $\circ$ ist assoziativ, d.h.

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

aber nicht kommutativ, denn im Allgemeinen ist $f \circ g \neq g \circ f$.

Beispiel

Verknüpfungen der Abbildungen

$$f(D) = D \cap [0,2),\ g(D) = D \cup [0,3),\ h(D) = D \setminus [2,3)$$

auf der Menge der Teilmengen von $\mathbb{R}$

(i) $f \circ g \neq g \circ f$ (nicht kommutativ):
Gegenbeispiel für die Menge $[1,4)$

$$\begin{aligned}
(f \circ g)([1,4)) &= f(g([0,4))) = f([0,4) \cup [0,3)) = f([0,4)) \\
&= [0,4) \cap [0,2) = [0,2) \\
(g \circ f)([1,4)) &= g([1,2)) = [0,3)
\end{aligned}$$

(ii) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (assoziativ):

$$(h \circ g)(D') = h(D' \cup [0,3)) = D' \cup [0,2)$$

$D' = f(D) \quad \rightsquigarrow$

$$(h \circ g) \circ f(D) = (D \cap [0,2)) \cup [0,2)) = [0,2)$$

gleiches Resultat bei anderer Klammerung

$$(g \circ f)(D) = g(D \cap [0,2)) = (D \cap [0,2)) \cup [0,3) = [0,3)$$
$$\implies h \circ (g \circ f)(D) = [0,3) \setminus [2,3) = [0,2)$$