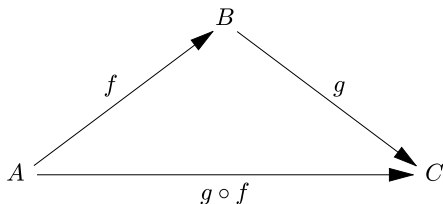


Verknüpfung von Abbildungen

Die Verknüpfung oder Komposition zweier Abbildungen $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ ist durch

$$a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)), \quad a \in A,$$

definiert und in dem Diagramm veranschaulicht.



Die Verknüpfung \circ ist assoziativ, d.h.

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

aber nicht kommutativ, denn im Allgemeinen ist $f \circ g \neq g \circ f$.

Beispiel

Verknüpfungen der Abbildungen

$$f(D) = D \cap [0, 2), \quad g(D) = D \cup [0, 3), \quad h(D) = D \setminus [2, 3)$$

auf der Menge der Teilmengen von \mathbb{R}

(i) $f \circ g \neq g \circ f$ (nicht kommutativ):

Gegenbeispiel für die Menge $[1, 4)$

$$\begin{aligned}(f \circ g)([1, 4)) &= f(g([1, 4))) = f([0, 4) \cup [0, 3)) = f([0, 4)) \\ &= [0, 4) \cap [0, 2) = [0, 2)\end{aligned}$$

$$(g \circ f)([1, 4)) = g([1, 2)) = [0, 3)$$

(ii) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (assoziativ):

$$(h \circ g)(D') = h(D' \cup [0, 3)) = D' \cup [0, 2)$$

$$D' = f(D) \rightsquigarrow$$

$$(h \circ g) \circ f(D) = (D \cap [0, 2)) \cup [0, 2)) = [0, 2)$$

gleiches Resultat bei anderer Klammerung

$$\begin{aligned}(g \circ f)(D) &= g(D \cap [0, 2)) = (D \cap [0, 2)) \cup [0, 3) = [0, 3) \\ \implies h \circ (g \circ f)(D) &= [0, 3) \setminus [2, 3) = [0, 2)\end{aligned}$$