Relation

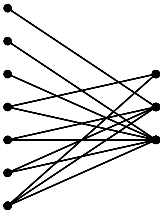
Stehen Elemente einer Menge A in Beziehung zu Elementen aus einer Menge B, so kann dies mit Hilfe einer Relation ausgedrückt werden. Diese besteht aus geordneten Paaren (a, b) der Elemente, die durch die Beziehung verknüpft sind. Eine Relation R ist also eine Teilmenge des kartesischen Produkts von A und B. Man sagt a steht in Relation zu b und schreibt $a \,\mathrm{R}\, b$:

$$a \,\mathrm{R}\, b \quad \Longleftrightarrow \quad (a, b) \in R \subseteq A \times B\,.$$

Beispiel

Relationale Datenbank: Zuordnung von Eigenschaften

Name	**Geburtsdatum**
Albert Einstein	14.03.1879
David Hilbert	23.01.1862
Bernhard Riemann	17.10.1826
Carl Friedrich Gauß	30.04.1777
Joseph-Louis Lagrange	25.01.1736
Leonard Euler	15.04.1707
Isaac Newton	25.12.1642



Fachgebiet
Astronomie
Physik
Mathematik

Nummerierung der Namen und Fachgebiete $\rightsquigarrow$ Beschreibung der Relation R als Teilmenge von $\{1, \ldots, 7\} \times \{1, 2, 3\}$:

$$R \sim \{(1,2),(2,3),(3,3),(4,1),(4,3),\\ (5,2),(5,3),(6,2),(6,3),(7,1),(7,2),(7,3)\}$$

Eigenschaften von Relationen

Eine Relation R auf einer Menge A ($R \subseteq A \times A$) heißt

- reflexiv, wenn jedes Element in Relation zu sich selbst steht: $\forall a \in A : a \mathrel{\mathrm{R}} a$
- symmetrisch, wenn die Reihenfolge der Elemente keine Rolle spielt: $a \mathrel{\mathrm{R}} b \implies b \mathrel{\mathrm{R}} a$
- antisymmetrisch, wenn aus der Symmetrie die Identität folgt: $a \mathrel{\mathrm{R}} b \land b \mathrel{\mathrm{R}} a \implies a = b$
- transitiv, wenn aus einer Kette das mittlere Element entfernt werden kann: $a \mathrel{\mathrm{R}} b \land b \mathrel{\mathrm{R}} c \implies a \mathrel{\mathrm{R}} c$
- total, wenn je zwei Elemente in mindestens einer Richtung in Relation stehen: $\forall a, b \in A : a \mathrel{\mathrm{R}} b \lor b \mathrel{\mathrm{R}} a$

Ist eine Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv, so wird sie Äquivalenzrelation genannt. Es wird dann meist $a \sim b$ statt $a \, \mathrm{R} \, b$ oder $(a, b) \in R$ geschrieben. Eine Äquivalenzrelation unterteilt die Menge A in disjunkte Teilmengen (Äquivalenzklassen), wobei zwei Elemente einer Teilmenge zueinander in Relation stehen (äquivalent sind), während zwei Elemente aus unterschiedlichen Teilmengen dies nicht tun.

Ist eine Relation reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, so ist sie eine Halbordnung und man schreibt meist $a \leq b$ statt $a \, \mathrm{R} \, b$ oder $(a, b) \in R$. Ist eine Halbordnung zusätzlich total, heißt sie (totale) Ordnung und A heißt durch $\leq$ geordnet.

Beispiel

Halbordnung und Äquivalenzrelation auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$, der Menge aller Teilmengen einer Menge M

(i) Mengeninklusion $\subseteq$:
Halbordnung in $\mathcal{P}(M)$, denn

$A \subseteq A \quad \rightsquigarrow \quad$ reflexiv

$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B \quad \rightsquigarrow \quad$ antisymmetrisch

$A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C \quad \rightsquigarrow \quad$ transitiv

keine Ordnung, falls $|M| > 1$:

$$a, b \in M, a \neq b : \{a\} \not\subseteq \{b\} \wedge \{b\} \not\subseteq \{a\},$$

d.h. es gibt Mengen, die nicht zueinander in Relation stehen ($\subseteq$ nicht total)

(ii) „hat gleich viele Elemente wie“:
Äquivalenzrelation in $\mathcal{P}(M)$ für eine endliche Menge M, denn

$|A| = |A| \quad \rightsquigarrow \quad$ reflexiv

$|A| = |B| \implies |B| = |A| \quad \rightsquigarrow \quad$ symmetrisch

$|A| = |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C| \quad \rightsquigarrow \quad$ transitiv