Quantoren

Als Abkürzung für die Formulierungen

„es gibt ...“, „für alle ...“

werden der Existenzquantor $\exists$ und der Allquantor $\forall$ verwendet. Diese Quantoren werden häufig in Verbindung mit Aussagen $A(p)$ benutzt, die von einem Parameter p aus einer Menge P abhängen.

Schreibweise	Bedeutung
$\exists\, p \in P: \; A(p)$	es gibt mindestens ein p aus P, für das $A(p)$ wahr ist
$\forall\, p \in P: \; A(p)$	für alle p aus P ist $A(p)$ wahr

Bei der Negation der beiden Aussagentypen vertauschen sich die Quantoren:

$$\begin{aligned} \neg\big(\exists\, p \in P:\ A(p)\big) &= \forall\, p \in P:\ \neg A(p) \\ \neg\big(\forall\, p \in P:\ A(p)\big) &= \exists\, p \in P:\ \neg A(p) \end{aligned}$$

Gebräuchlich ist ebenfalls die Schreibweise $\exists!$ für die Formulierung „es gibt genau ein ...“.

Beispiel

Negation des Kriteriums für die Konvergenz einer Folge $a_1, a_2, \ldots$ gegen 0:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon\ \forall\, n \in \mathbb{N}:\ \ n > n_\varepsilon \implies |a_n| < \varepsilon$$

Negation durch Negieren der Kernaussage und Ersetzen der Quantoren,

$$\exists \leftrightarrow \forall$$

Ersetzen der Implikation ($A \implies B = \neg A \vee B$) und Anwendung der De Morganschen Regel ($\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$) $\quad \rightsquigarrow$

$$\neg(n > n_\varepsilon \implies |a_n| < \varepsilon) = \neg(n \le n_\varepsilon \vee |a_n| < \varepsilon) = n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \ge \varepsilon$$

negierte Aussage:

$$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, n_\varepsilon\ \exists\, n \in \mathbb{N}:\ \ n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \ge \varepsilon$$

Vereinfachung: $\exists\, \varepsilon > 0:\ \ |a_n| \ge \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$