Potenzen einer komplexen Zahl

Um Potenzen komplexer Zahlen zu bilden, verwendet man am geeignetsten die Polarform $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Für $m \in \mathbb{Z}$ ist

$$z^m = r^m \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\,.$$

Die gleiche Formel bleibt auch für rationale Exponenten $m = p/q \in \mathbb{Q}$ richtig, allerdings ist das Ergebnis aufgrund der Mehrdeutigkeit der q-ten Einheitswurzel nicht eindeutig. Da die Gleichung $w^q = 1$ die q Lösungen

$$w = w_q^k, \quad w_q = \exp\left(2\pi\mathrm{i}/q\right), \quad k = 0, \ldots, q-1$$

besitzt, erhalt man entsprechend

$$r^{p/q} \exp\left(\mathrm{i}p\varphi/q\right) w_q^{kp}, \quad k = 0, \ldots, q-1$$

als mögliche Werte für $z^{p/q}$.

Beispiel

Berechnung der möglichen Werte für

$$z = (-1 + \mathrm{i})^{2/3}$$

Polarform: $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\varphi = \arctan(1/(-1)) + \pi = 3\pi/4 \quad \rightsquigarrow$

$$\left(\sqrt{2}\exp(3\pi\mathrm{i}/4)\right)^{2/3} = \sqrt[3]{2}\exp(\pi\mathrm{i}/2)w_3^{2k}, \quad k = 0, 1, 2\,,$$

mit $w_3 = \exp(2\pi\mathrm{i}/3)$

$\exp(\pi\mathrm{i}/2) = \mathrm{i}$, Formel von Euler-Moivre $\quad \rightsquigarrow \quad$ mögliche Werte:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[3]{2}\,\mathrm{i} \\
z_1 &= \sqrt[3]{2}\,\mathrm{i}\,\exp(4\pi\mathrm{i}/3) = \sqrt[3]{2}\,\mathrm{i}\,(\cos(4\pi/3) + \mathrm{i}\sin(4\pi/3)) \\
&= \sqrt[3]{2}\,(-\sin(4\pi/3) + \mathrm{i}\cos(4\pi/3)) = \sqrt[3]{2}(\sqrt{3}/2 - \mathrm{i}/2) \\
z_2 &= \sqrt[3]{2}\,\mathrm{i}\,\exp(8\pi\mathrm{i}/3) = \sqrt[3]{2}(-\sqrt{3}/2 - \mathrm{i}/2)
\end{aligned}$$

Probe

$$z_1^3 = \left(\sqrt[3]{2}\,\mathrm{i}\,\exp(4\pi\mathrm{i}/3)\right)^3 = 2\mathrm{i}^3 \underbrace{\exp(4\pi\mathrm{i})}_{=1} = -2\,\mathrm{i} = (-1+\mathrm{i})^2$$

d.h. $z_1 = (-1+\mathrm{i})^{2/3}$

analoge Probe für z_0 und z_2

Beispiel

Mehrdeutigkeit von Potenzen für irrationale oder imaginäre Exponenten

benutze:

$$\exp(2\pi k \mathrm{i}) = 1 \quad \Longrightarrow \quad z^s = (z \cdot 1)^s = z^s \exp(2\pi k s \mathrm{i})$$

für $k \in \mathbb{Z}$

- unendlich viele Lösungen auf dem Einheitskreis:
$$\begin{aligned} \mathrm{i}^\pi &= \exp((\pi/2 + 2\pi k)\mathrm{i})^\pi \\ &= \exp\left(\mathrm{i}(\pi^2/2 + 2\pi^2 k)\right), \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- unendlich viele Lösungen auf einer Halbgeraden:
$$\begin{aligned} \pi^\mathrm{i} &= \exp(\ln\pi + 2\pi k \mathrm{i})^\mathrm{i} = \exp(\mathrm{i}\ln\pi - 2\pi k) \\ &= \exp(-2\pi k)\exp(\mathrm{i}\ln\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- unendlich viele Lösungen auf der positiven reellen Achse:
$$\begin{aligned} \mathrm{i}^\mathrm{i} &= \exp((\pi/2 + 2\pi k)\mathrm{i})^\mathrm{i} \\ &= \exp(-\pi/2 - 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$