Menge

Eine Menge A besteht aus verschiedenen Elementen $a_1, a_2, \ldots$:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\}\,.$$

Werden die Elemente durch eine Eigenschaft E charakterisiert, so schreibt man

$$A = \{a : \ a \text{ besitzt die Eigenschaft } E\}\,.$$

Die Reihenfolge der Elemente ist dabei unerheblich.

Schreibweise	Bedeutung
$a \in A$	a ist Element von A
$a \notin A$	a ist nicht Element von A
$A \subseteq B$	A ist Teilmenge von B
$A \not\subseteq B$	A ist keine Teilmenge von B
$A \subset B$	A ist echte Teilmenge von B
$\|A\|$	Anzahl der Elemente in A
$\emptyset$	leere Menge

Gilt $|A| < \infty$ bzw. $|A| = \infty$, so spricht man von einer endlichen bzw. unendlichen Menge. Mengen heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen ihren Elementen gibt ($|A| = |B|$ für endliche Mengen).

Die Menge $\mathcal{P}(A)$ aller Teilmengen von A wird als Potenzmenge bezeichnet, d.h.

$$\mathcal{P}(A) = \{B : \; B \subseteq A\} \,.$$

Dabei gilt $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(A)$ und, für eine endliche Menge, $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Zahlenmengen

Für folgende Zahlenmengen benutzt man Standardbezeichnungen.

- natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$
- ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$
- rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \{p/q : \; p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N},\, \operatorname{ggT}(p, q) = 1\}$
- reelle Zahlen: $\mathbb{R} = \{x : \; x = \lim_{n \to \infty} q_n,\, q_n \in \mathbb{Q}\}$
- komplexe Zahlen: $\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}y : \; x, y \in \mathbb{R},\, \mathrm{i}^2 = -1\}$

Gebräuchlich sind ebenfalls die Schreibweisen $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : \; x > 0\}$ und dazu entsprechend $\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Z}_0^-$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}_0^+$, $\mathbb{Q}^-$, $\mathbb{Q}_0^-$ $\mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}_0^-$.

Mengenoperationen

Für zwei Mengen A und B sind die folgenden Operationen definiert.

- Vereinigung:

$$A \cup B = \{x : \; x \in A \; \vee \; x \in B\}$$

- Durchschnitt:

$$A \cap B = \{x : \; x \in A \; \wedge \; x \in B\}$$

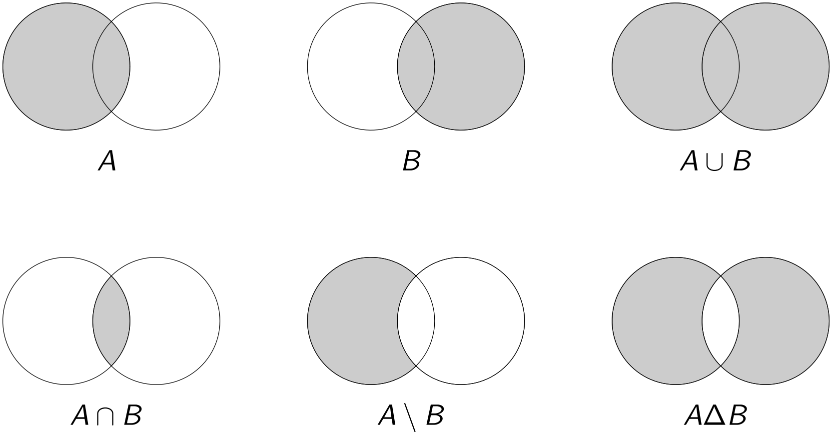
- Differenz, Komplementärmenge:

$$A \setminus B = \{x : \; x \in A \; \wedge \; x \notin B\}$$

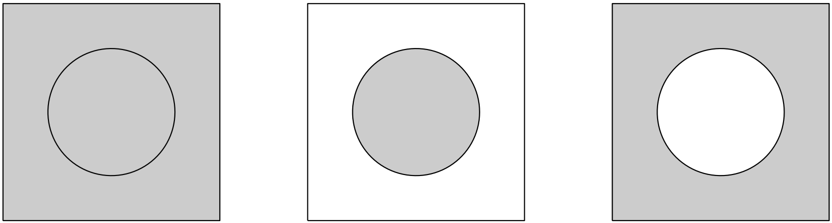
- symmetrische Differenz:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

In der Abbildung sind die Mengenoperationen mit Hilfe sogenannter Venn-Diagramme illustriert.



Ist $B \subset A$, fallen einige der Diagramme zusammen:



$A = A \cup B$ $\qquad$ $B = A \cap B$ $\qquad$ $A \setminus B = A \Delta B$

Regeln für Mengenoperationen

Für Mengenoperationen gelten die folgenden Identitäten.

- Assoziativgesetze:

$$
\begin{aligned}
(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\
(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C)
\end{aligned}
$$

- Kommutativgesetze:

$$
\begin{aligned}
A \cap B &= B \cap A \\
A \cup B &= B \cup A
\end{aligned}
$$

- De Morgansche Regeln:

$$
\begin{aligned}
C \setminus (A \cap B) &= (C \setminus A) \cup (C \setminus B) \\
C \setminus (A \cup B) &= (C \setminus A) \cap (C \setminus B)
\end{aligned}
$$

- Distributivgesetze:

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C)\\ (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C)\end{aligned}$$

Diese Regeln entsprechen den Gesetzen für logische Operationen, wenn man die Operatoren $\cup, \cap$ durch $\wedge, \vee$ ersetzt und $C\setminus$ durch $\neg$.

Beweis

zeige die erste De Morgansche Regel:

$$C\backslash(A \cap B) \quad = \quad (C\backslash A) \cup (C\backslash B)$$

linke Menge

$$\begin{aligned} x \in C\backslash(A \cap B) \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in C \wedge x \notin (A \cap B) \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in C \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \end{aligned}$$

Distributivgesetz für logische Operationen,

$$U \wedge (V \vee W) = (U \wedge V) \vee (U \wedge W),$$

$\rightsquigarrow$ äquivalente Darstellung

$$(x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin B) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (C\backslash A \cup C\backslash B)$$

$\rightsquigarrow$ x in rechter Menge

analoge Argumentation für die anderen Gesetze

Mandelbrot-Menge

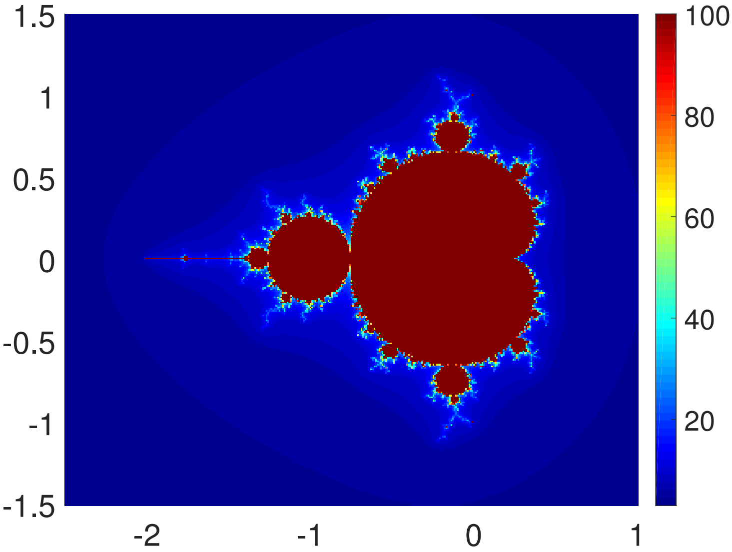
Die Mandelbrot-Menge M besteht aus allen Punkten $c = a + \mathrm{i}b \widehat{=} (a, b)$ der komplexen Ebene, für die die durch

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad z_0 = 0\,,$$

definierte Folge beschränkt bleibt.
In der Abbildung wurde die Geschwindigkeit, mit der die Folge divergiert, zur Definition der Farbwerte verwendet. Dadurch wird insbesondere der fraktale Rand hervorgehoben.
Beispielsweise kann man

$$f(c) = \max\{n \leq N : \ |z_n| < R\}$$

mit hinreichend großen Parametern N und R als Farbindex für die Punkte c wählen. Für $x \in M$ ist dann $f(c) = N$, und kleine Werte von $f(c)$ bedeuten, dass c einen großen Abstand vom Rand von M hat.


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-1
0
1
100
80
60
40
20

MATLAB-Skript zur Generierung des Pixelbildes

```
>> N = 100;     % maximale Iterationszahl
>> R = 1000;    % Radius für Divergenz
>> d = 0.1;     % Abstand der Bildpunkte
>> xmin=-2.5; xmax=1; ymin=-1.5; ymax=1.5;   % Bildausschnitt

>> % Initialisierung der Parameter, Startwerte und Farbindizes
>> [x,y] = meshgrid([xmin:dxmax],[ymin:d:ymax]); c = x+i*y;
>> z = zeros(size(c)); f = zeros(size(c));
>>
>> % Iteration
>> for n=1:N
>>    z = z.^2 + c; f = f+(abs(z)<R);
>> end

>> % Konvertierung in ein Pixelbild
>> imagesc([-4 4],[-4 4],f), colormap(jet), colorbar
```