Aussage

Unter einer Aussage versteht man einen sprachlichen Ausdruck, dem man eindeutig einen der beiden Wahrheitswerte w („wahr“) bzw. f („falsch“) zuordnen kann.
Aussagen werden mit Großbuchstaben bezeichnet,

$$A: \quad \text{Beschreibung},$$

und können mit logischen Operationen verknüpft werden. Grundlegende mathematische Aussagen, die nicht aus anderen Aussagen abgeleitet werden können, nennt man Axiome.

Beispiel

Verschiedene Aussagen

- Wahre Aussage
  $$A: \quad \text{Jede natürliche Zahl ist ein Produkt von Primzahlen.}$$
- Falsche Aussage
  $$B: \quad \text{Jede Primzahl ist ungerade}$$
  (2 ist eine gerade Primzahl)
- Unbewiesene Vermutung (wahr oder falsch, d.h. eine Aussage, bei der der Wahrheitswert noch nicht entschieden werden konnte)
  $$C: \quad \text{Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge}$$
  größter bisher bekannter Primzahlzwilling (Stand 19.4.2006):
  $$16869987339975 \cdot 2^{171960} \pm 1$$
- Keine Aussage (Feststellung ohne Wahrheitswert)
  $$D: \quad \text{Freitag der dreizehnte ist ein Unglückstag}$$

Logische Operationen

Logische Aussagen können durch die in der folgenden Tabelle angegebenen Operationen verknüpft werden.

Bezeichnung	Schreibweise	(Sprechweise)	wahr, genau dann wenn
Negation	$\neg A$	(nicht A)	A falsch ist
Konjunktion	$A \wedge B$	(A und B)	A und B wahr sind
Disjunktion	$A \vee B$	(A oder B)	A oder B wahr ist
Antivalenz	$A \not\equiv B$	(entweder A oder B)	A und B verschiedene Wahrheitswerte haben
Implikation	$A \Longrightarrow B$ $B \Longleftarrow A$	(aus A folgt B) (B folgt aus A)	A falsch oder B wahr ist
Äquivalenz	$A \Longleftrightarrow B$	(A ist äquivalent zu B)	A und B den gleichen Wahrheitswert haben

Um in logischen Ausdrücken Klammern zu sparen, wird festgelegt, dass $\neg$ stärker bindet als $\wedge$ sowie $\vee$ und diese wiederum stärker als $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ sowie $\not\equiv$.

Bei der Implikation ist zu beachten, dass B nur dann wahr sein muss, wenn A wahr ist. Aus falschen Voraussetzungen können sowohl richtige, als auch falsche Schlüsse gezogen werden.

Für die Oder-Verknüpfung wird auch das „$+$“-Symbol verwendet und für die Und-Verknüpfung das „$\cdot$“-Symbol. Verwendet man dann 0 für den Wert „falsch“ und interpretiert jeden anderen Wert als „wahr“, können die logischen Verknüpfungen durch Rechnen mit natürlichen Zahlen durchgeführt werden.

Vor allem in Computersprachen werden die aus dem Englischen stammenden Begriffe NOT (Negation), AND (Konjunktion), OR (Disjunktion), EXOR oder XOR (exclusive or, Antivalenz) und deren Negationen NAND (negierte Konjunktion), NOR (negierte Disjunktion) und NXOR (Äquivalenz) verwendet.

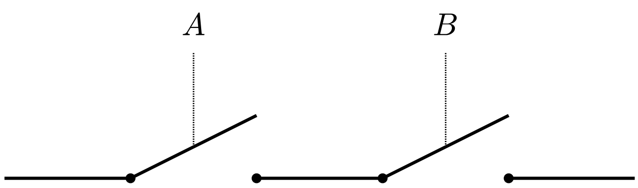
In der folgenden Tabelle sind die Wahrheitswerte der vorgestellten Verknüpfungen angegeben. Dabei steht *w* für wahr und *f* für falsch.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \not\equiv B$	$A \Longrightarrow B$	$A \Longleftrightarrow B$
w	w	f	w	w	f	w	w
w	f	f	f	w	w	f	f
f	w	w	f	w	w	w	f
f	f	w	f	f	f	w	w

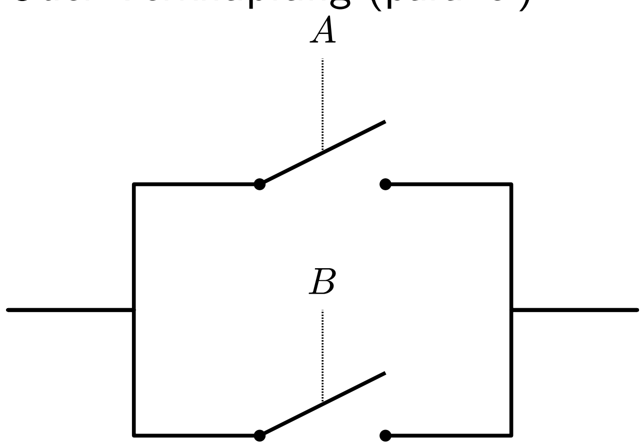
Beispiel

Darstellung der Verknüpfung von Aussagen mit Hilfe von Schaltern (geschlossen $\Longleftrightarrow$ wahre Aussage, geöffnet $\Longleftrightarrow$ falsche Aussage)

Und-Verknüpfung (seriell)

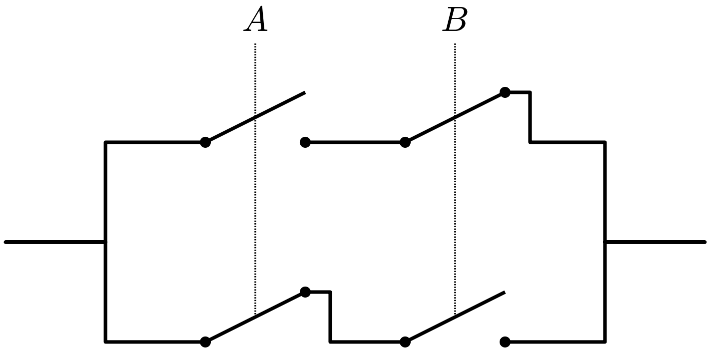


Oder-Verknüpfung (parallel)

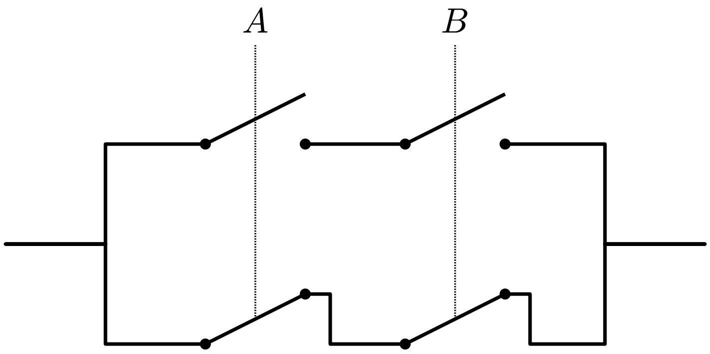


negierte Aussage: Schalter der bei falscher Aussage geschlossen ist

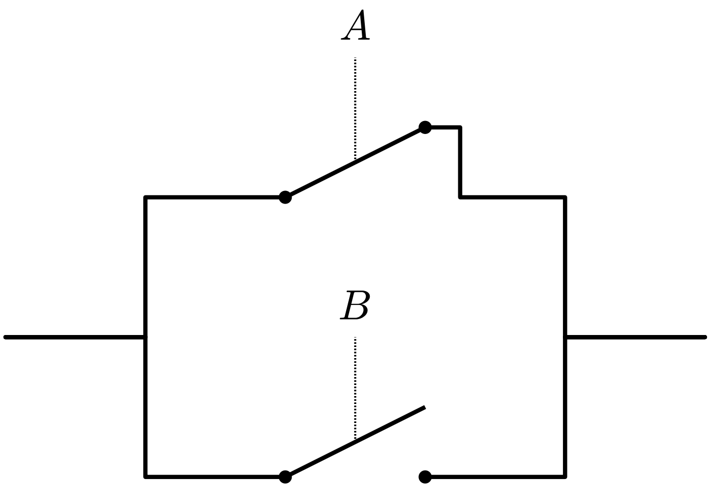
Antivalenz: $A \not\equiv B$ bzw. $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$



Äquivalenz: $A \iff B$ bzw. $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

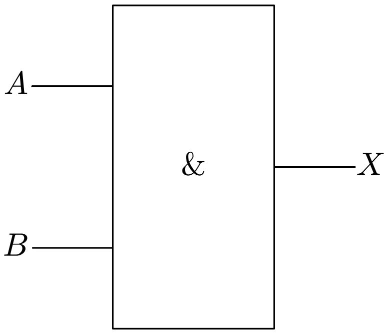


Implikation: $A \Longrightarrow B$ bzw. $\neg A \vee B$

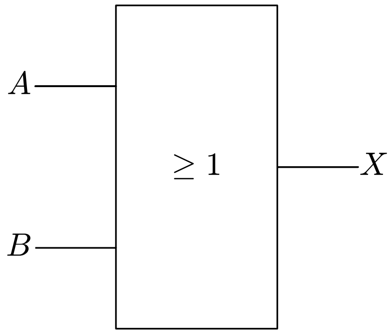


DIN 40900 Symbole für Schaltungen

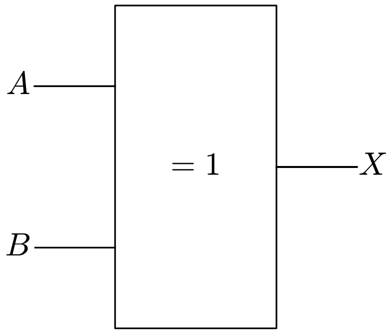
Konjunktion



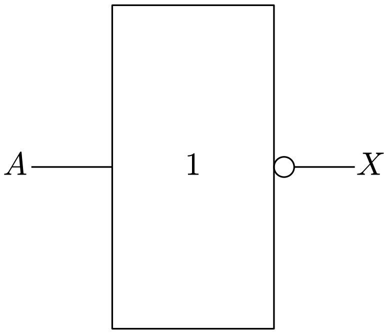
Disjunktion



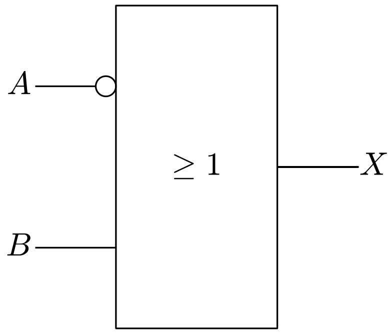
Antivalenz



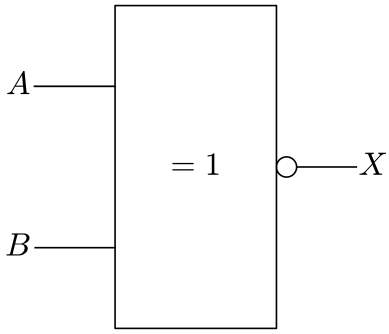
Negation



Implikation



Äquivalenz



wahr: 1, falsch: 0, Negation: Kreis

Identitäten und Regeln für logische Operationen

Für logische Operationen gelten die folgenden Identitäten.

- Assoziativgesetze:

$$\begin{aligned}(A \wedge B) \wedge C &= A \wedge (B \wedge C) \\ (A \vee B) \vee C &= A \vee (B \vee C)\end{aligned}$$

- Kommutativgesetze:

$$\begin{aligned}A \wedge B &= B \wedge A \\ A \vee B &= B \vee A\end{aligned}$$

- De Morgansche Regeln:

$$\begin{aligned}\neg(A \wedge B) &= (\neg A) \vee (\neg B) \\ \neg(A \vee B) &= (\neg A) \wedge (\neg B)\end{aligned}$$

- Distributivgesetze:

$$\begin{aligned}(A \wedge B) \vee C &= (A \vee C) \wedge (B \vee C)\\ (A \vee B) \wedge C &= (A \wedge C) \vee (B \wedge C)\end{aligned}$$

- Sonstige:

$$\begin{aligned}\neg(\neg A) &= A\\ A \wedge A &= A\\ A \vee A &= A\end{aligned}$$

- Alternative Darstellungen:

$$\begin{array}{rccccc}\text{Implikation:} & A \Longrightarrow B & = & \neg A \vee B & = & \neg A \Longleftarrow \neg B\\ \text{Äquivalenz:} & A \Longleftrightarrow B & = & (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) & & \\ \text{Antivalenz:} & A \not\equiv B & = & (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) & & \end{array}$$

Die alternativen Formulierungen werden oft in Beweisen benutzt.
Ein logischer Ausdruck, der unabhängig vom Wahrheitswert der auftretenden Aussagen immer wahr bzw. immer falsch ist, wird als Tautologie bzw. Kontradiktion bezeichnet. Ein solcher Ausdruck kann bei einer Umformung durch w (oder 1) bzw. f (oder 0) ersetzt werden.
Insbesondere gelten die Identitäten:

$$\begin{aligned}A \vee \neg A = \mathrm{w} \quad &\text{bzw.} \quad A \wedge \neg A = \mathrm{f}\,,\\ A \vee \mathrm{w} = \mathrm{w} \quad &\text{bzw.} \quad A \wedge \mathrm{w} = A\,,\\ A \vee \mathrm{f} = A \quad &\text{bzw.} \quad A \wedge \mathrm{f} = \mathrm{f}\,.\end{aligned}$$

Beweis

Untersuchung aller Möglichkeiten für die Wahrheitswerte der Aussagen

Tabelle für die erste De Morgansche Regel

$$\neg(A \wedge B) \quad = \quad (\neg A) \vee (\neg B)$$

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \wedge B)$, $(\neg A) \vee (\neg B)$
w	w	w	f	f	f
w	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	w
f	f	f	w	w	w

analoge Argumentation für andere Regeln

Beispiel

Umformung der Aussage

$$\underbrace{|x-1|>1}_{A} \Longrightarrow \underbrace{(x<0) \vee (x>2)}_{B}$$

De Morgansche Regel $\neg(C \vee D) = \neg C \wedge \neg D \quad \Longrightarrow$

$$\neg B = \neg(x<0) \wedge \neg(x>2) = (x \geq 0) \wedge (x \leq 2) = 0 \leq x \leq 2$$

$(A \Longrightarrow B) \quad \Longleftrightarrow \quad (\neg B \Longrightarrow \neg A)$, d.h.

$$0 \leq x \leq 2 \Longrightarrow |x-1| \leq 1 \quad = \quad w$$

Alternative: benutze Definition der Implikation

$$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg A) \vee B = |x-1| \leq 1 \vee (x<0) \vee (x>2)$$

ebenfalls wahr, da für alle $x \in \mathbb{R}$ richtig.

Als Abkürzung für die Formulierungen

„es gibt ... “,   „für alle ... “

werden der Existenzquantor $\exists$ und der Allquantor $\forall$ verwendet. Diese Quantoren werden häufig in Verbindung mit Aussagen $A(p)$ benutzt, die von einem Parameter p aus einer Menge P abhängen.

Schreibweise	Bedeutung
$\exists\, p \in P: \;\; A(p)$	es gibt mindestens ein p aus P, für das $A(p)$ wahr ist
$\forall\, p \in P: \;\; A(p)$	für alle p aus P ist $A(p)$ wahr

Bei der Negation der beiden Aussagentypen vertauschen sich die Quantoren:

$$\begin{aligned} \neg\big(\exists\, p \in P: \;\; A(p)\big) &= \forall\, p \in P: \;\neg A(p) \\ \neg\big(\forall\, p \in P: \;\; A(p)\big) &= \exists\, p \in P: \;\neg A(p) \end{aligned}$$

Gebräuchlich ist ebenfalls die Schreibweise $\exists!$ für die Formulierung „es gibt genau ein ... “.

Beispiel

Negation des Kriteriums für die Konvergenz einer Folge $a_1, a_2, \ldots$ gegen 0:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n_\varepsilon \;\forall\, n \in \mathbb{N} : \;\; n > n_\varepsilon \implies |a_n| < \varepsilon$$

Negation durch Negieren der Kernaussage und Ersetzen der Quantoren,

$$\exists \leftrightarrow \forall$$

Ersetzen der Implikation ($A \implies B = \neg A \vee B$) und Anwendung der De Morganschen Regel ($\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$) $\quad\rightsquigarrow$

$$\neg(n > n_\varepsilon \implies |a_n| < \varepsilon) = \neg(n \le n_\varepsilon \vee |a_n| < \varepsilon) = n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \ge \varepsilon$$

negierte Aussage:

$$\exists\, \varepsilon > 0 \;\forall\, n_\varepsilon \;\exists\, n \in \mathbb{N} : \;\; n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \ge \varepsilon$$

Vereinfachung: $\exists\, \varepsilon > 0 : \;\; |a_n| \ge \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

Direkter Beweis

Eine Behauptung B kann bewiesen werden, indem sie aus bekannten wahren Aussagen A hergeleitet oder auf solche zurückgeführt wird:

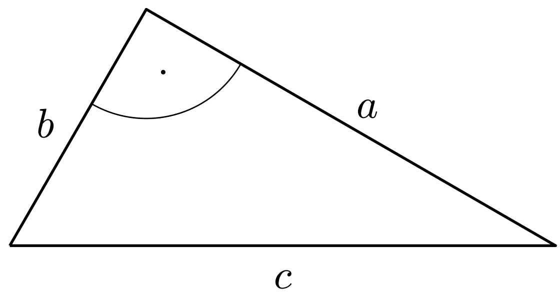
$$A \Longrightarrow B\,.$$

Die Aussagen A können dabei auch Voraussetzungen beinhalten, die für die Gültigkeit der Behauptung B notwendig sind.

Beispiel

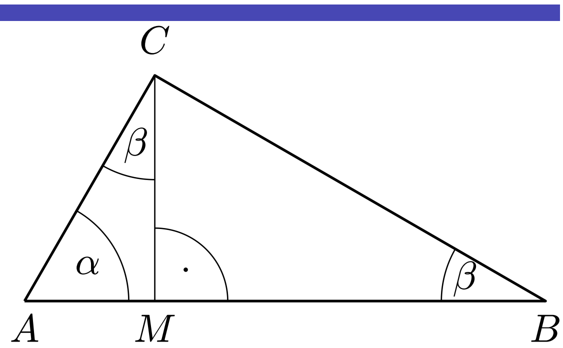
Satz des Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



mit a, b den Längen der Katheten und c der Länge der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks

Direkter Beweis:
benutze als bekannt: Ähnliche Dreiecke, d.h. Dreiecke mit gleichen Winkeln, haben die gleichen Seitenverhältnisse.



Anwendung auf $\Delta(A,B,C) \sim \Delta(A,C,M) \quad \Longrightarrow$

$|\overline{AC}| : |\overline{AB}| = |\overline{AM}| : |\overline{AC}|$, d.h. $|\overline{AC}|^2 = |\overline{AB}| \cdot |\overline{AM}|$

analog:

$|\overline{BC}|^2 = |\overline{AB}| \cdot |\overline{BM}|$

Addition der letzten beiden Gleichungen unter Berücksichtigung von $|\overline{AM}| + |\overline{BM}| = |\overline{AB}| \quad \Longrightarrow$

$$a^2 + b^2 = |\overline{BC}|^2 + |\overline{AC}|^2 = |\overline{AB}|\,|\overline{BM}| + |\overline{AB}|\,|\overline{AM}| = |\overline{AB}|^2 = c^2$$

Indirekter Beweis

Um zu zeigen, dass aus Voraussetzungen V eine Behauptung B folgt ($V \implies B$), kann man die Annahme, dass die Aussage B bei Gültigkeit der Voraussetzungen V falsch ist, zu einem Widerspruch führen:

$$V \wedge (\neg B) \implies F\,,$$

mit einer falschen Aussage F, insbesondere $F = \neg V$ oder $F = B$.

Speziell gilt

$$B = (\neg B \implies F)\,,$$

falls keine Voraussetzungen getroffen sind, d.h. die Aussage B ist wahr, wenn aus der Annahme, dass B falsch ist, die Gültigkeit einer falschen Aussage F gefolgert werden kann.

Beweis

(i) Beweismethode durch Widerspruch:

$$V \wedge (\neg B) \implies F$$

Umformung mit der Darstellung der Implikation als Disjunktion, $C \implies D \quad = \quad \neg C \vee D$, und der De Morganschen Regel, $\neg(C \wedge D) \quad = \quad \neg C \vee \neg D \quad \rightsquigarrow$

$$\neg(V \wedge (\neg B)) \vee F \quad = \quad (\neg V) \vee B \vee F\,,$$

d.h. die „Widerspruchsimplikation" ist wahr g.d.w. B wahr ist, denn $\neg V$ und F sind falsch

(ii) Äquivalente Darstellung von B:

$$\neg B \implies F \quad = \quad B \vee F \quad = \quad B\,,$$

da F falsch ist

Beispiel

Indirekter Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$

Annahme, dass die Behauptung B falsch ist, d.h. es gilt (bzw. wahr ist)

$$\neg B : \sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \text{mit } p, q \in \mathbb{N} \wedge \mathrm{ggT}(p, q) = 1 \quad (\text{gekürzter Bruch } p/q)$$

und ggT dem größten gemeinsamen Teiler

Quadrieren und Multiplikation mit $q^2 \quad \rightsquigarrow$

$$2q^2 = p^2$$

$\implies \quad p^2$ und p gerade: $p = 2r$
$q^2 = 2r^2 \quad \implies \quad q$ gerade
Widerspruch zu $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$, d.h.

$$(\neg B) \implies F, \text{ eine falsche Aussage};$$

also ist B wahr

Vollständige Induktion

Aussageformen mit natürlichen Zahlen als Parametern kann man mit vollständiger Induktion beweisen. Ist $A(n)$ eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage, so sind dazu die folgenden beiden Beweisschritte durchzuführen.

- Induktionsanfang: Man zeigt, dass $A(1)$ richtig ist.
- Induktionsschluss: Man zeigt, dass aus der Annahme, dass $A(n)$ richtig ist (Induktionsvoraussetzung), folgt, dass auch $A(n+1)$ richtig ist, d.h.
$$A(n) \implies A(n+1).$$

Dann ist gewährleistet, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Bei einem Induktionsbeweis wird sukzessive das Nächste aus dem Vorherigen gefolgert. Wird der Induktionsanfang nicht für $n_0 = 1$, sondern für ein $n_0 > 1$ durchgeführt, so gilt die Aussage nur für alle $n \geq n_0$.

Beispiel

Beweis der Formel für die Summe der Quadratzahlen,

$$A(n): \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\,,$$

mit vollständiger Induktion

- Induktionsanfang, Überprüfung von $A(1)$:

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \quad \checkmark$$

- Induktionsschluss, $A(n) \implies A(n+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{A(n)} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)\big[n(2n+1) + 6(n+1)\big]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

Verwendung der Induktionsvoraussetzung bei der zweiten Gleichheit

Beispiel

Anzahl der Spiele bei einem Tennis-Turnier (K.O.-System) mit 2^n Teilnehmern:

$$2^n - 1$$

($n = 7$ bei einem Grand-Slam)

(i) Beweis mit vollständiger Induktion:

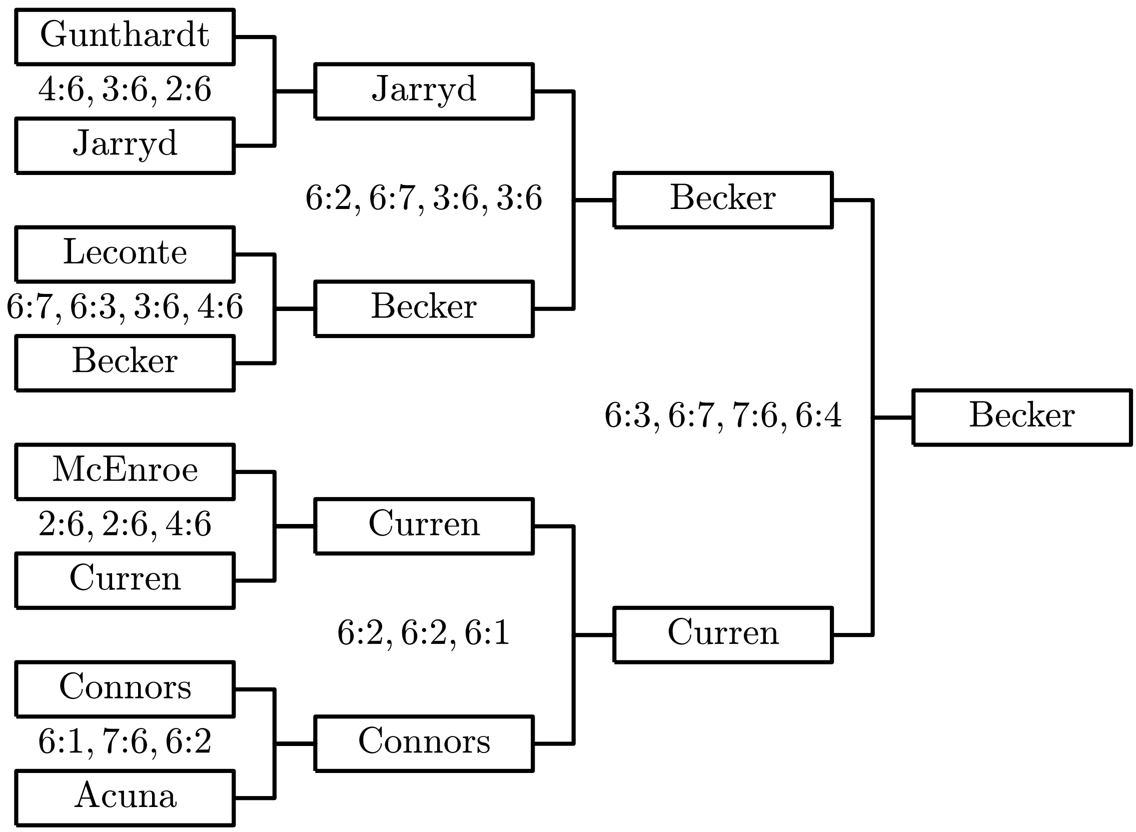
- Induktionsanfang ($n = 1$):
  $2 = 2^1$ Teilnehmer $\rightsquigarrow$ $1 = 2^1 - 1$ Spiele $\checkmark$
- Induktionsschluss ($n \to n + 1$):
  2^{n+1} Teilnehmer $\rightsquigarrow$ zwei Gruppen mit je 2^n Teilnehmern
  Induktionsvoraussetzung $\implies$ $[2^n - 1]$ Spiele in jeder Gruppe
  zusätzliches letztes Spiel für die Sieger der beiden Gruppen $\rightsquigarrow$

  $$2 \cdot [2^n - 1] + 1 = 2^{n+1} - 1$$

  Spiele bei 2^{n+1} Teilnehmern

(ii) Einfachere Argumentation ohne vollständige Induktion:
Beim K.O.-System verliert bis auf den Gewinner jeder Teilnehmer genau einmal; jedes Spiel hat genau einen Verlierer.
$\rightsquigarrow$ ein Spiel weniger als die Teilnehmerzahl

Alternativbeweis auch bei Teilnehmerfeldern beliebiger Größe anwendbar (z.B. bei Freilosen) letzte 3 Runden des Wimbledon-Turniers von 1985



Beispiel

Paradox:

„Alle Mäuse sind grau“

Beweis mit vollständiger Induktion

- Induktionsschluss ($n \to n+1$):
  $n+1$ Mäuse: $M_1, \ldots, M_{n+1}$
  $M_1, \ldots, M_n$ und $M_2, \ldots, M_{n+1}$ jeweils grau nach Induktionsvoraussetzung
  $\Longrightarrow \quad n+1$ Mäuse grau

Grund für den Widerspruch: fehlender Induktionsanfang
$\rightsquigarrow$ fehlerhafter Beweis (offensichtlich gibt es ebenfalls weiße Mäuse)

Menge

Eine Menge A besteht aus verschiedenen Elementen $a_1, a_2, \ldots$:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\}\,.$$

Werden die Elemente durch eine Eigenschaft E charakterisiert, so schreibt man

$$A = \{a : \; a \text{ besitzt die Eigenschaft } E\}\,.$$

Die Reihenfolge der Elemente ist dabei unerheblich.

Schreibweise	Bedeutung
$a \in A$	a ist Element von A
$a \notin A$	a ist nicht Element von A
$A \subseteq B$	A ist Teilmenge von B
$A \not\subseteq B$	A ist keine Teilmenge von B
$A \subset B$	A ist echte Teilmenge von B
$\|A\|$	Anzahl der Elemente in A
$\emptyset$	leere Menge

Gilt $|A| < \infty$ bzw. $|A| = \infty$, so spricht man von einer endlichen bzw. unendlichen Menge. Mengen heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen ihren Elementen gibt ($|A| = |B|$ für endliche Mengen).

Die Menge $\mathcal{P}(A)$ aller Teilmengen von A wird als Potenzmenge bezeichnet, d.h.

$$\mathcal{P}(A) = \{B : \; B \subseteq A\}\,.$$

Dabei gilt $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(A)$ und, für eine endliche Menge, $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Zahlenmengen

Für folgende Zahlenmengen benutzt man Standardbezeichnungen.

- natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$
- ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$
- rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \{p/q : \; p \in \mathbb{Z}, \, q \in \mathbb{N}, \, \mathrm{ggT}(p, q) = 1\}$
- reelle Zahlen: $\mathbb{R} = \{x : \; x = \lim_{n\to\infty} q_n, \, q_n \in \mathbb{Q}\}$
- komplexe Zahlen: $\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}y : \; x, y \in \mathbb{R}, \, \mathrm{i}^2 = -1\}$

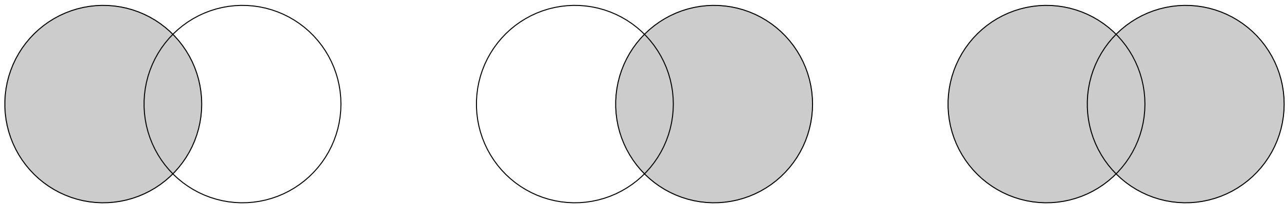
Gebräuchlich sind ebenfalls die Schreibweisen $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : \; x > 0\}$ und dazu entsprechend $\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Z}_0^-$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}_0^+$, $\mathbb{Q}^-$, $\mathbb{Q}_0^-$ $\mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}_0^-$.

Mengenoperationen

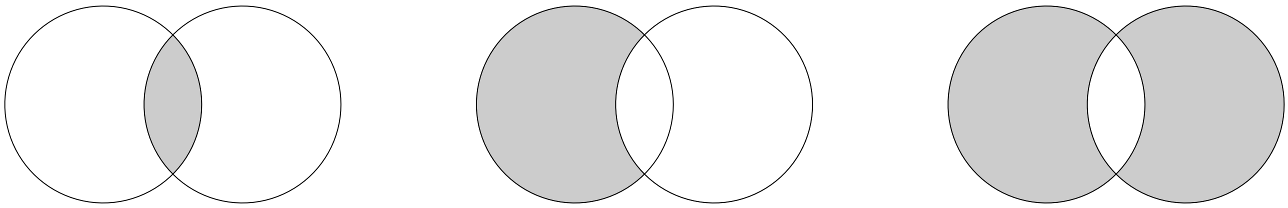
Für zwei Mengen A und B sind die folgenden Operationen definiert.

- Vereinigung:
$$A \cup B = \{x : \; x \in A \; \vee \; x \in B\}$$
- Durchschnitt:
$$A \cap B = \{x : \; x \in A \; \wedge \; x \in B\}$$
- Differenz, Komplementärmenge:
$$A \setminus B = \{x : \; x \in A \; \wedge \; x \notin B\}$$
- symmetrische Differenz:
$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

In der Abbildung sind die Mengenoperationen mit Hilfe sogenannter Venn-Diagramme illustriert.

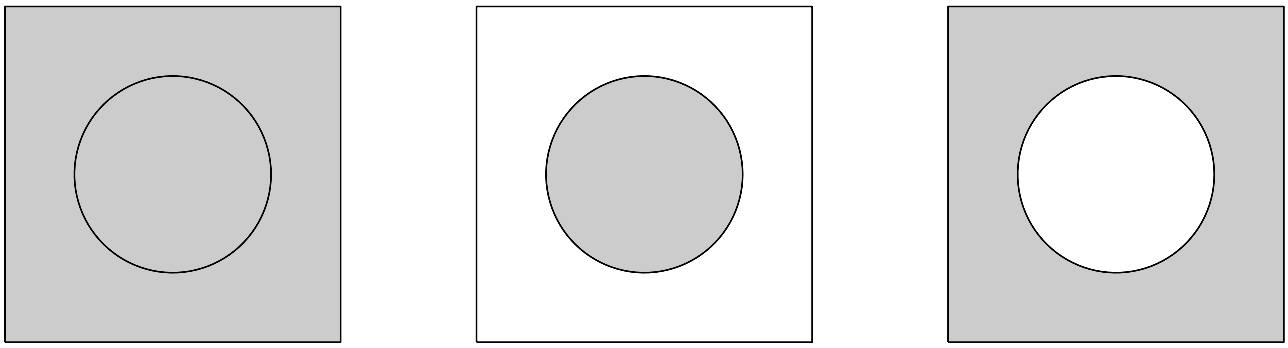


A $\qquad$ B $\qquad$ $A \cup B$



$A \cap B$ $\qquad$ $A \setminus B$ $\qquad$ $A \Delta B$

Ist $B \subset A$, fallen einige der Diagramme zusammen:



$A = A \cup B$ $\qquad$ $B = A \cap B$ $\qquad$ $A \setminus B = A \Delta B$

Regeln für Mengenoperationen

Für Mengenoperationen gelten die folgenden Identitäten.

- Assoziativgesetze:

$$
\begin{aligned}
(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\
(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C)
\end{aligned}
$$

- Kommutativgesetze:

$$
\begin{aligned}
A \cap B &= B \cap A \\
A \cup B &= B \cup A
\end{aligned}
$$

- De Morgansche Regeln:

$$
\begin{aligned}
C \backslash (A \cap B) &= (C \backslash A) \cup (C \backslash B) \\
C \backslash (A \cup B) &= (C \backslash A) \cap (C \backslash B)
\end{aligned}
$$

- Distributivgesetze:

$$
\begin{aligned}
(A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C) \\
(A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C)
\end{aligned}
$$

Diese Regeln entsprechen den Gesetzen für logische Operationen, wenn man die Operatoren $\cup, \cap$ durch $\wedge, \vee$ ersetzt und $C\backslash$ durch $\neg$.

Beweis

zeige die erste De Morgansche Regel:

$$C\backslash(A\cap B) \quad = \quad (C\backslash A)\cup(C\backslash B)$$

linke Menge

$$\begin{aligned} x\in C\backslash(A\cap B) &\iff x\in C\ \wedge x\notin(A\cap B) \\ &\iff x\in C\ \wedge(x\notin A\vee x\notin B) \end{aligned}$$

Distributivgesetz für logische Operationen,

$$U\wedge(V\vee W) = (U\wedge V)\vee(U\wedge W)\,,$$

$\rightsquigarrow$ äquivalente Darstellung

$$(x\in C\wedge x\notin A)\vee(x\in C\wedge x\notin B) \quad\iff\quad x\in(C\backslash A\cup C\backslash B)$$

$\rightsquigarrow$ x in rechter Menge

analoge Argumentation für die anderen Gesetze

Mandelbrot-Menge

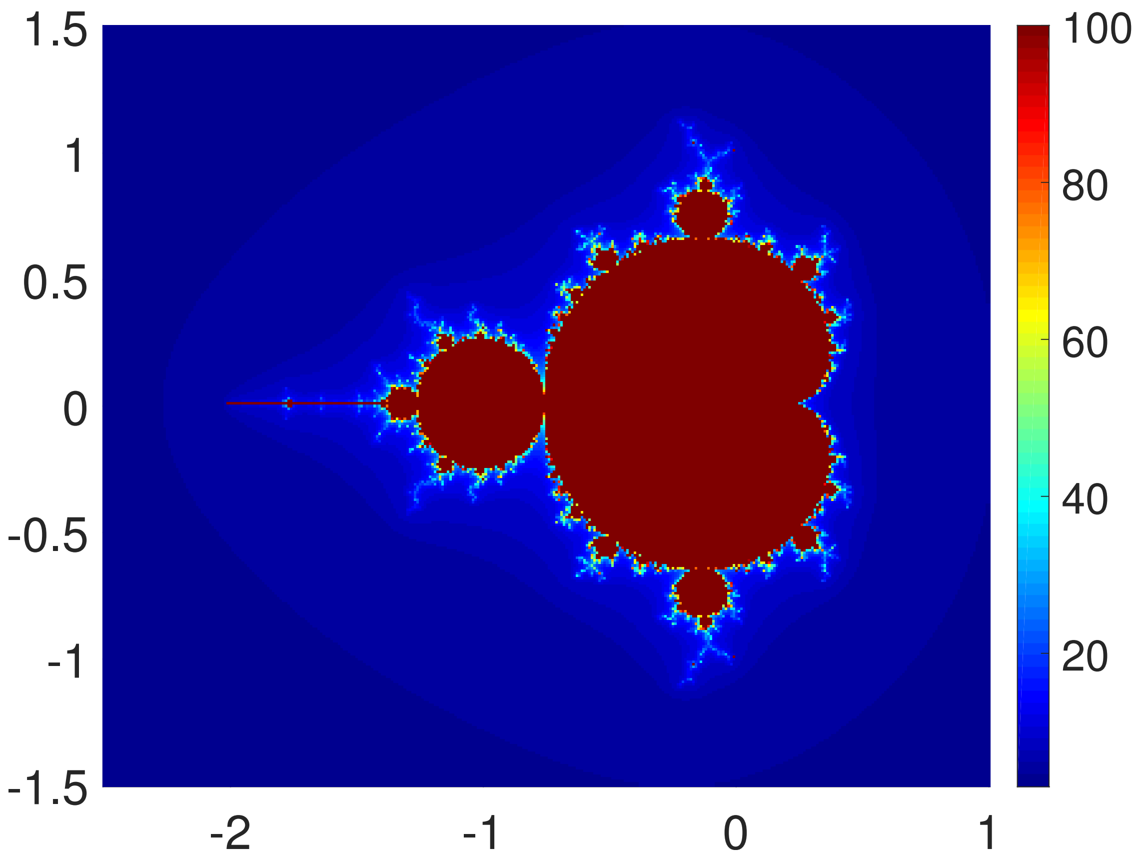
Die Mandelbrot-Menge M besteht aus allen Punkten $c = a + \mathrm{i}b \widehat{=} (a, b)$ der komplexen Ebene, für die die durch

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad z_0 = 0\,,$$

definierte Folge beschränkt bleibt.
In der Abbildung wurde die Geschwindigkeit, mit der die Folge divergiert, zur Definition der Farbwerte verwendet. Dadurch wird insbesondere der fraktale Rand hervorgehoben.
Beispielsweise kann man

$$f(c) = \max\{n\le N:\ |z_n| < R\}$$

mit hinreichend großen Parametern N und R als Farbindex für die Punkte c wählen. Für $x\in M$ ist dann $f(c) = N$, und kleine Werte von $f(c)$ bedeuten, dass c einen großen Abstand vom Rand von M hat.



MATLAB-Skript zur Generierung des Pixelbildes

```
>> N = 100;     % maximale Iterationszahl
>> R = 1000;    % Radius für Divergenz
>> d = 0.1;     % Abstand der Bildpunkte
>> xmin=-2.5; xmax=1; ymin=-1.5; ymax=1.5;   % Bildausschnitt

>> % Initialisierung der Parameter, Startwerte und Farbindizes
>> [x,y] = meshgrid([xmin:dxmax],[ymin:d:ymax]); c = x+i*y;
>> z = zeros(size(c)); f = zeros(size(c));
>>
>> % Iteration
>> for n=1:N
>>    z = z.^2 + c; f = f+(abs(z)<R);
>> end

>> % Konvertierung in ein Pixelbild
>> imagesc([-4 4],[-4 4],f), colormap(jet), colorbar
```

Kartesisches Produkt

Das kartesische Produkt zweier Mengen A und B ist die Menge aller geordneten Paare von Elementen der beiden Mengen:

$$A \times B = \{(a, b) : \; a \in A \wedge b \in B\} .$$

Es gilt

$$(a, b) = (a', b') \quad \Longleftrightarrow \quad (a = a' \wedge b = b') ,$$

d.h. im Gegensatz zu der Gleichheit von Mengen ($\{a, b\} = \{b, a\}$) ist die Reihenfolge wesentlich.

Für endliche Mengen gilt $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Entsprechend definiert man das n-fache kartesische Produkt

$$A_1 \times \cdots \times A_n$$

als die Menge aller geordneten Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_k \in A_k$. Sind die Mengen gleich, so schreibt man $A^n = A \times \cdots \times A$.

Relation

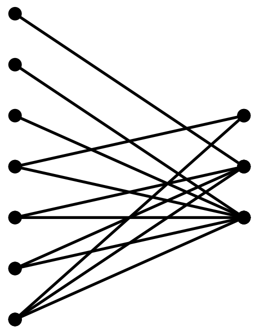
Stehen Elemente einer Menge A in Beziehung zu Elementen aus einer Menge B, so kann dies mit Hilfe einer Relation ausgedrückt werden. Diese besteht aus geordneten Paaren (a, b) der Elemente, die durch die Beziehung verknüpft sind. Eine Relation R ist also eine Teilmenge des kartesischen Produkts von A und B. Man sagt a steht in Relation zu b und schreibt $a \,\mathrm{R}\, b$:

$$a \,\mathrm{R}\, b \quad \Longleftrightarrow \quad (a, b) \in R \subseteq A \times B .$$

Beispiel

Relationale Datenbank: Zuordnung von Eigenschaften

Name	**Geburtsdatum**
Albert Einstein	14.03.1879
David Hilbert	23.01.1862
Bernhard Riemann	17.10.1826
Carl Friedrich Gauß	30.04.1777
Joseph-Louis Lagrange	25.01.1736
Leonard Euler	15.04.1707
Isaac Newton	25.12.1642



Fachgebiet
Astronomie
Physik
Mathematik

Nummerierung der Namen und Fachgebiete $\rightsquigarrow$ Beschreibung der Relation R als Teilmenge von $\{1, \ldots, 7\} \times \{1, 2, 3\}$:

$$R \sim \{(1,2),(2,3),(3,3),(4,1),(4,3),\\ (5,2),(5,3),(6,2),(6,3),(7,1),(7,2),(7,3)\}$$

Eigenschaften von Relationen

Eine Relation R auf einer Menge A ($R \subseteq A \times A$) heißt

- reflexiv, wenn jedes Element in Relation zu sich selbst steht: $\forall a \in A : a \,\mathrm{R}\, a$
- symmetrisch, wenn die Reihenfolge der Elemente keine Rolle spielt: $a \,\mathrm{R}\, b \implies b \,\mathrm{R}\, a$
- antisymmetrisch, wenn aus der Symmetrie die Identität folgt: $a \,\mathrm{R}\, b \wedge b \,\mathrm{R}\, a \implies a = b$
- transitiv, wenn aus einer Kette das mittlere Element entfernt werden kann: $a \,\mathrm{R}\, b \wedge b \,\mathrm{R}\, c \implies a \,\mathrm{R}\, c$
- total, wenn je zwei Elemente in mindestens einer Richtung in Relation stehen: $\forall a, b \in A : a \,\mathrm{R}\, b \vee b \,\mathrm{R}\, a$

Ist eine Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv, so wird sie Äquivalenzrelation genannt. Es wird dann meist $a \sim b$ statt $a \, \mathrm{R} \, b$ oder $(a, b) \in R$ geschrieben. Eine Äquivalenzrelation unterteilt die Menge A in disjunkte Teilmengen (Äquivalenzklassen), wobei zwei Elemente einer Teilmenge zueinander in Relation stehen (äquivalent sind), während zwei Elemente aus unterschiedlichen Teilmengen dies nicht tun.

Ist eine Relation reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, so ist sie eine Halbordnung und man schreibt meist $a \leq b$ statt $a \, \mathrm{R} \, b$ oder $(a, b) \in R$. Ist eine Halbordnung zusätzlich total, heißt sie (totale) Ordnung und A heißt durch $\leq$ geordnet.

Beispiel

Halbordnung und Äquivalenzrelation auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$, der Menge aller Teilmengen einer Menge M

(i) Mengeninklusion $\subseteq$:
Halbordnung in $\mathcal{P}(M)$, denn

$A \subseteq A \quad \rightsquigarrow \quad$ reflexiv

$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B \quad \rightsquigarrow \quad$ antisymmetrisch

$A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C \quad \rightsquigarrow \quad$ transitiv

keine Ordnung, falls $|M| > 1$:

$$a, b \in M, a \neq b : \{a\} \not\subseteq \{b\} \wedge \{b\} \not\subseteq \{a\} \, ,$$

d.h. es gibt Mengen, die nicht zueinander in Relation stehen ($\subseteq$ nicht total)

(ii) „hat gleich viele Elemente wie“:
Äquivalenzrelation in $\mathcal{P}(M)$ für eine endliche Menge M, denn

$|A| = |A| \quad \rightsquigarrow \quad$ reflexiv

$|A| = |B| \implies |B| = |A| \quad \rightsquigarrow \quad$ symmetrisch

$|A| = |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C| \quad \rightsquigarrow \quad$ transitiv

Abbildung

Unter einer Abbildung f von einer Menge A in eine Menge B versteht man eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ eindeutig ein bestimmtes $b = f(a) \in B$ zuordnet:

$$f : A \longrightarrow B .$$

Für die Elementzuordnung verwendet man die Schreibweise

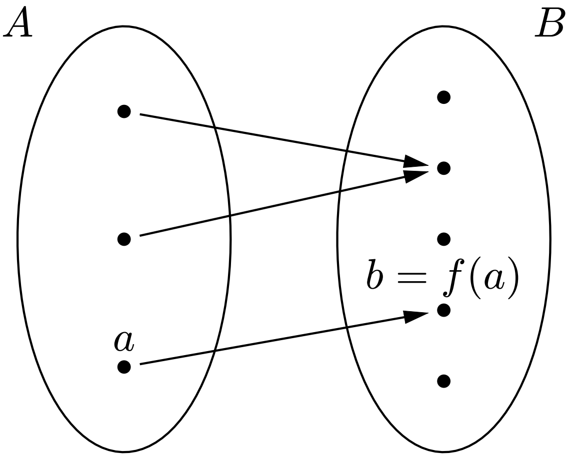
$$a \mapsto b = f(a)$$

und bezeichnet b als das Bild von a, bzw. a als ein Urbild von b.

Ist $U \subseteq A$, so heißt $f(U) = \{f(a) : a \in U\} \subseteq B$ das Bild von U und für $V \subseteq B$ heißt $f^{-1}(V) = \{a : f(a) \in V\} \subseteq A$ das Urbild von V unter der Abbildung f.

Die Menge $f(A)$ heißt Wertebereich und A Definitionsbereich der Abbildung f.

Eine Abbildung kann man folgendermaßen illustrieren.



Wie aus dem Bild ersichtlich ist, müssen nicht alle Elemente aus B als Bild eines Elementes aus A auftreten und ein Element aus B darf auch Bild mehrerer Elemente aus A sein, d.h. Elemente aus der Bildmenge können mehrere Urbilder haben. Es muss allerdings für jedes Element aus A ein eindeutiges Bild geben, das heißt von jedem a muss genau ein Pfeil ausgehen.

Statt Abbildung verwendet man auch den Begriff Funktion, insbesondere in der reellen und komplexen Analysis.

Eigenschaften von Abbildungen

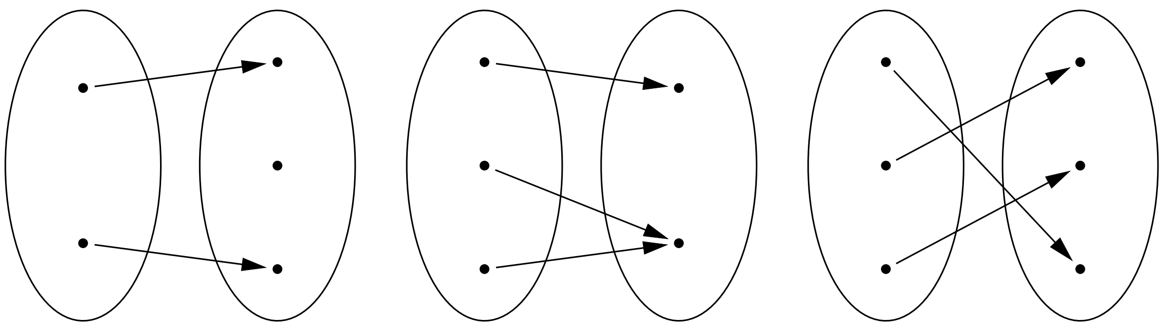
Eine Abbildung

$$f : A \longrightarrow B$$

zwischen zwei Mengen A und B heißt

- injektiv, falls $f(a) \neq f(a')$ für alle $a, a' \in A$ mit $a \neq a'$
- surjektiv, falls es für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$
- bijektiv, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Diese Begriffe lassen sich anhand von Mengendiagrammen illustrieren:



injektiv surjektiv bijektiv

Beispiel

Abbildungen zwischen den natürlichen Zahlen

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

(i) Bijektiv:

$$f(n) = n - (-1)^n$$

vertauscht benachbarte Zahlen

$$\begin{array}{lcl} 1 & \mapsto & 1 - (-1)^1 = 1 + 1 = 2 \\ 2 & \mapsto & 2 - (-1)^2 = 2 - 1 = 1 \\ 3 & \mapsto & 4 \\ 4 & \mapsto & 3 \\ & \ldots & \end{array}$$

(ii) Surjektiv:

$$n \mapsto \text{ Anzahl der Dezimalziffern}$$

zu jeder Ziffernzahl $f(n)$ gibt es ein Urbild n.

(iii) Injektiv:

$$f(n) = n^2$$

für $n, n' \in \mathbb{N}$ gilt: $n \neq n' \implies n^2 \neq n'^2$

(iv) Weder surjektiv noch injektiv:

$$n \mapsto \text{ nächstgrößere Primzahl}$$

nicht surjektiv, da nur Primzahlen als Bilder auftreten
nicht injektiv, da z.B. $f(14) = 17 = f(15)$

Verknüpfung von Abbildungen

Die Verknüpfung oder Komposition zweier Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ ist durch

$$a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)), \quad a \in A,$$

definiert und in dem Diagramm veranschaulicht.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & C \end{tikzcd}$$

Die Verknüpfung $\circ$ ist assoziativ, d.h.

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

aber nicht kommutativ, denn im Allgemeinen ist $f \circ g \neq g \circ f$.

Beispiel

Verknüpfungen der Abbildungen

$$f(D) = D \cap [0,2),\ g(D) = D \cup [0,3),\ h(D) = D \setminus [2,3)$$

auf der Menge der Teilmengen von $\mathbb{R}$

(i) $f \circ g \neq g \circ f$ (nicht kommutativ):
Gegenbeispiel für die Menge $[1,4)$

$$\begin{aligned} (f \circ g)([1,4)) &= f(g([0,4))) = f([0,4) \cup [0,3)) = f([0,4)) \\ &= [0,4) \cap [0,2) = [0,2) \\ (g \circ f)([1,4)) &= g([1,2)) = [0,3) \end{aligned}$$

(ii) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (assoziativ):

$$(h \circ g)(D') = h(D' \cup [0,3)) = D' \cup [0,2)$$

$D' = f(D) \quad \rightsquigarrow$

$$(h \circ g) \circ f(D) = (D \cap [0,2)) \cup [0,2)) = [0,2)$$

gleiches Resultat bei anderer Klammerung

$$\begin{aligned} &(g \circ f)(D) = g(D \cap [0,2)) = (D \cap [0,2)) \cup [0,3) = [0,3) \\ \implies \; & h \circ (g \circ f)(D) = [0,3) \setminus [2,3) = [0,2) \end{aligned}$$

Inverse Abbildung

Für eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ ist durch

$$b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$$

die inverse Abbildung $f^{-1} : B \to A$ definiert.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] & B \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Insbesondere ist $a = f^{-1}(f(a))$, d.h. $f^{-1} \circ f$ ist die identische Abbildung.

Bei Funktionen ist bei der Schreibweise zu beachten, dass keine Verwechslung mit dem Kehrwert entsteht: $f^{-1}(x) \neq f(x)^{-1}$. Fehlt das Argument x, so muss aus dem Kontext ersichtlich sein, was gemeint ist.

Fakultät

Das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen wird mit

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n$$

bezeichnet (lies: n Fakultät). Konsistent mit der Definition des leeren Produktes setzt man $0! = 1$.

Die Zahl $n!$ entspricht der Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten n unterschiedliche Objekte anzuordnen, d.h. der Anzahl der Permutationen von n Elementen.

Für großes n kann das asymptotische Verhalten von $n!$ mit Hilfe der Stirlingschen Formel,

$$n! = \sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n\,(1 + O(1/n))\,,$$

approximiert werden.

Binomialkoeffizient

Der Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-1)k}, \quad n,k \in \mathbb{N}_0,\ n \geq k\,,$$

gibt die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen an.

Insbesondere gilt aufgrund der Konvention $0! = 1$

$$\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right) = 1, \quad \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right) = 1\,,$$

und aus der Definition folgt ebenfalls unmittelbar

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}\,.$$

Beispiel

2-elementige Teilmengen der Menge $\{a, b, c, d, e\}$

5 Möglichkeiten für das erste Element, 4 Möglichkeiten für das zweite Element (keine gleichen Elemente) $\rightsquigarrow$

$$5 \cdot 4 \text{ mögliche Paare}$$

Irrelevanz der Reihenfolge der Elemente von Mengen ($\{u, v\} = \{v, u\}$)
$\Longrightarrow$ Division durch 2, d.h.

$$\frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{5!/3!}{2!} = \binom{5}{2} = 10 \text{ Möglichkeiten}$$

$\rightsquigarrow$ Teilmengen

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}$$

Pascalsches Dreieck

Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ lassen sich mit Hilfe der Rekursion

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

in einem Dreiecksschema, dem sogenannten Pascalschen Dreieck, berechnen.

$$\begin{array}{c|ccccccc}
\binom{0}{k} & & & & 1 & & & \\
\binom{1}{k} & & & 1 & & 1 & & \\
\binom{2}{k} & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \\
\binom{3}{k} & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Beweis

zu zeigende Rekursion:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k},$$

d.h.

$$\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Division durch $n!$ und Multiplikation mit $(n-k+1)!\,k!$ $\quad\rightsquigarrow$

$$n+1 = k + (n+1-k) \quad \checkmark$$

Binomische Formel

Mit der binomischen Formel lassen sich Potenzen einer Summe von zwei Variablen berechnen. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .\end{aligned}$$

Insbesondere ist für $n = 2, 3$

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 , \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 .\end{aligned}$$

Beweis

vollständige Induktion

- Induktionsanfang ($n = 0$):

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 = (a+b)^0$$

- Induktionsschluss ($n \to n+1$):
  Induktionsvoraussetzung $\implies$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Indexverschiebung ($k \leftarrow k-1$) im zweiten Summand $b\sum \ldots$ $\rightsquigarrow$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k$$

Konvention $\binom{n}{n+1} = 0 = \binom{n}{-1}$ $\rightsquigarrow$ Summation jeweils von 0 bis $n+1$

Rekursion für Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

$\rightsquigarrow$ Formel für $(a+b)^{n+1}$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

Identitäten für Binomialkoeffizienten

Für Binomialkoeffizienten gelten folgende Identitäten:

$$\begin{aligned}
2^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \\
0 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k, \quad n \geq 1, \\
\binom{n}{k} &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}, \quad k < n, \\
\binom{n}{k} &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{k-1}, \quad k > 0.
\end{aligned}$$

Beweis

(i) Erste und zweite Identität:
Folgerungen aus dem Binomischen Lehrsatz,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k ,$$

mit $a = b = 1$ bzw. $a = -b = 1$

(ii) Dritte Identität:
wiederholte Anwendung der Rekursionsformel $\leadsto$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} \\
&= \cdots \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{n-k}{1} + \binom{n-k}{0}
\end{aligned}$$

Ersetzen des letzten Binomialkoeffizienten $\binom{n-k}{0}$ durch $\binom{n-k-1}{0}$ $\rightsquigarrow$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}$$

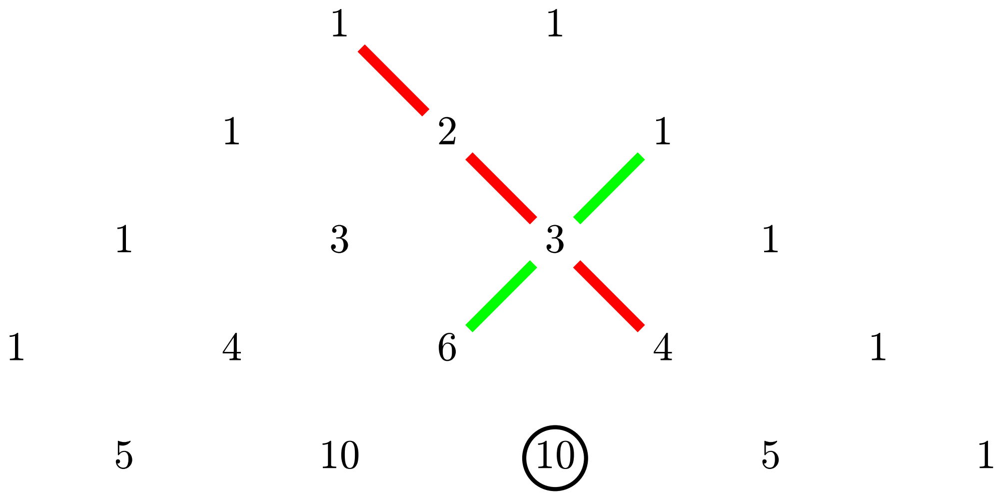
d.h. die dritte Identität

(iii) Vierte Identität:
Substitution $k' = n - k$ $\rightsquigarrow$

$$\binom{n}{n-k'} = \sum_{i=0}^{k'} \binom{n-k'-1+i}{n-k'-1}$$

$\binom{m}{j} = \binom{m}{m-j}$ mit $j = n - k'$ und $j = n - k' - 1$ $\Longrightarrow$ Äquivalenz zur dritten Identität

Illustration der letzten beiden Identitäten als Summationswege im Pascalschen Dreieck



dritte Identität: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

vierte Identität: $1 + 3 + 6 = 10$

Kombinatorik von Mengen

Die folgende Tabelle gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, aus einer Menge mit n verschiedenen Elementen k Elemente auszuwählen, wobei unterschieden werden muß, ob die Reihenfolge eine Rolle spielt (nicht sortiert) und Wiederholungen zugelassen sind.

	nicht sortiert	sortiert
ohne Wiederholungen	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$
mit Wiederholungen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

Beweis

(i) Auswahl ohne Wiederholungen:

- Berücksichtigung der Reihenfolge $\rightsquigarrow$
  n Möglichkeiten für das erste,
  $(n-1)$ Möglichkeiten für das zweite,
  ...
  $(n-k+1)$ Möglichkeiten für das k-te Element
  Gesamtzahl der Möglichkeiten:
  $$n(n-1)\cdots(n-k+1)$$
- Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge $\rightsquigarrow$ Division durch die Anzahl $k!$ der Permutationen von k Elementen, d.h.
  $$\binom{n}{k}$$
  Möglichkeiten

(ii) Auswahl mit Wiederholungen:

- Berücksichtigung der Reihenfolge $\rightsquigarrow$
  n Möglichkeiten für jedes Element, insgesamt

$$n^k$$

- Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge $\rightsquigarrow$
  Plazierung von $n-1$ Markierungen zwischen $n+k$ Punkten

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet \\ & & & & & \triangle & & \triangle & & & & \triangle & & \triangle & \end{array}$$

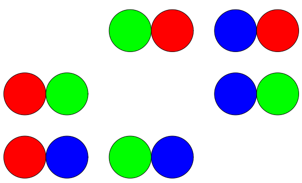
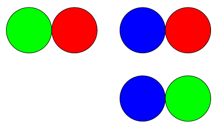
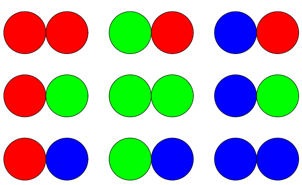
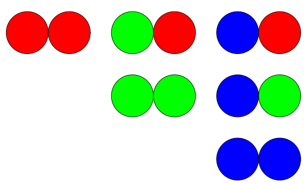
  um 1 verminderte Anzahl der Punkte zwischen der $(i-1)$-ten und i-ten Markierung $\widehat{=}$ Anzahl der Wiederholungen des i-ten Elements nach (i)

$$\binom{n+k-1}{n-1}$$

  mögliche Markierungen

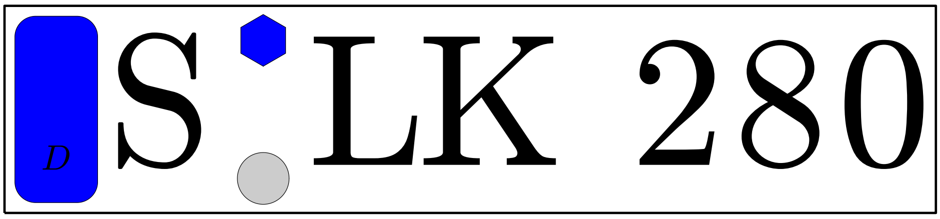
Beispiel

Anzahl der Möglichkeiten bei zweimaligem Ziehen aus einer Urne mit einer roten, einer grünen und einer blauen Kugel ($n = 3,\ k = 2$)

	nicht sortiert	sortiert
ohne Wiederholungen (ohne Zurücklegen)	$n \cdots (n-k+1) = 3 \cdot 2 = 6$ 	$\binom{n}{k} = \binom{3}{2} = 3$ 
mit Wiederholungen (mit Zurücklegen)	$n^k = 3^2 = 9$ 	$\binom{n+k-1}{k} = \binom{4}{2} = 6$ 

Beispiel

Deutsches Autokennzeichen:
Kombination von ≤ 3 Buchstaben für den Landkreis oder die Stadt, ≤ 2 weiteren Buchstaben und einer bis zu vierstelligen Zahl



26^n mögliche Kombinationen aus n Buchstaben $\rightsquigarrow$

$$(26 + 26^2 + 26^3) \cdot (26 + 26^2) \cdot 9999 = 1.28 \cdot 10^{11}$$

mögliche Kennzeichen

Komplexe Zahlen

Um auch Wurzeln aus negativen Zahlen bilden zu können, führt man eine imaginäre Einheit i als eine der Lösungen von

$$\mathrm{i}^2 = -1$$

ein und bezeichnet

$$\mathbb{C} = \{z = x + \mathrm{i}y : x, y \in \mathbb{R}\}$$

als die Menge der komplexen Zahlen. Dabei werden x und y Real- bzw. Imaginärteil genannt:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z\,.$$

Insbesondere ist $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$.

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= x_1 + x_2 + \mathrm{i}(y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

von Addition und Multiplikation, die im Einklang mit $\mathrm{i}^2 = -1$ stehen, gelten für die arithmetischen Operationen die üblichen Rechenregeln.

Beispiel

Addition und Multiplikation komplexer Zahlen

(i) Addition:

$$\begin{aligned}(2+3\mathrm{i})+(4-5\mathrm{i}) &= (2+4)+(3+(-5))\mathrm{i} \\ &= 6-2\mathrm{i}\end{aligned}$$

(ii) Multiplikation:

$$\begin{aligned}(2+3\mathrm{i})\cdot(4-5\mathrm{i}) &= 8-10\mathrm{i}+12\mathrm{i}-\underbrace{15\mathrm{i}^2}_{=-15} \\ &= 23+2\mathrm{i}\end{aligned}$$

$(\mathrm{i}^2=-1)$

Komplexe Konjugation

Für eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ definiert man die konjugiert komplexe Zahl

$$\bar{z} = x - \mathrm{i}y\,.$$

Geometrisch bedeutet die komplexe Konjugation eine Spiegelung an der x-Achse: $(x, y) \to (x, -y)$.

Die komplexe Konjugation ist mit den arithmetischen Operationen verträglich:

$$\overline{z_1 \circ z_2} = \bar{z}_1 \circ \bar{z}_2$$

für $\circ = +, -, *, /$.

Beispiel

Verträglichkeit von komplexer Konjugation mit dem Bilden von Summe und Produkt der komplexen Zahlen $z = 2 - \mathrm{i}$, $w = 1 + 3\mathrm{i}$

(i) Addition:

$$\begin{aligned} \bar{z} + \bar{w} &= (2+\mathrm{i}) + (1-3\mathrm{i}) &= 3 - 2\mathrm{i} \\ \overline{z+w} &= \overline{(2-\mathrm{i}) + (1+3\mathrm{i})} &= \overline{3+2\mathrm{i}} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Übereinstimmung

(ii) Multiplikation:

$$\begin{aligned} \bar{z}\,\bar{w} &= (2+\mathrm{i})(1-3\mathrm{i}) &= (2+3) + (1-6)\mathrm{i} &= 5 - 5\mathrm{i} \\ \overline{zw} &= \overline{(2-\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})} &= \overline{(2+3) + (-1+6)\mathrm{i}} &= \overline{5+5\mathrm{i}} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ gleiches Resultat $5 - 5\mathrm{i}$

Betrag einer komplexen Zahl

Der Betrag einer komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ ist als

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

definiert.

Für $z \in \mathbb{R}$ ist diese Definition konsistent mit der Definition der Betragsfunktion für reelle Zahlen und besitzt analoge Eigenschaften.

- Positivität:
$$|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$$
- Multiplikativität:
$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \quad |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|,\ z_2 \neq 0$$
- Dreiecksungleichung:
$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Beweis

(i) Positivität ✓

(ii) Multiplikativität:

- Produkt:

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= |(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2)|^2 = |(x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)|^2 \\ &= x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2\,, \end{aligned}$$

  da die Terme $\pm 2x_1x_2y_1y_2$ sich aufheben
  $\rightsquigarrow$ Übereinstimmung mit

$$|z_1|^2|z_2|^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$$

- Quotient:
  Anwendung der bewiesenen Identität für das Produkt von Beträgen
  $\rightsquigarrow$

$$|(z_1/z_2)||z_2| = |\underbrace{(z_1/z_2)z_2}_{z_1}| \quad\Longleftrightarrow\quad |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$$

(iii) Dreiecksungleichung:
Quadrieren der Ungleichungskette und Subtraktion von $|z_1|^2 + |z_2|^2$ $\rightsquigarrow$

$$-2|z_1||z_2| \le z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \le 2|z_1||z_2|$$

$\mathrm{Re}\, z = (z + \bar{z})/2$, $\overline{u\,\bar{v}} = \bar{u}\,v$ $\rightsquigarrow$ äquivalente Ungleichung

$$|\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)| \le |z_1||z_2|$$

bzw., da $z_1\bar{z}_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2) = (x_1x_2 + y_1y_2) + (\ldots)\mathrm{i}$,

$$|x_1x_2 + y_1y_2| \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

erneutes Quadrieren und Subtraktion von $x_1^2x_2^2$, $y_1^2y_2^2$ $\rightsquigarrow$

$$2x_1x_2y_1y_2 \le x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2$$

✓, da $(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \ge 0$

Beispiel

Illustration der Eigenschaften des Betrags für $z_1 = -1 + 2\mathrm{i}$, $z_2 = 3 - 4\mathrm{i}$

(i) Berechnung des Betrags (alternative Methoden):
$|x + \mathrm{i}y| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \rightsquigarrow$

$$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$|z|^2 = z\bar{z}$, dritte binomische Formel $\quad \rightsquigarrow$

$$|z_2| = \sqrt{(3 - 4\mathrm{i})(3 + 4\mathrm{i})} = \sqrt{9 - 16\mathrm{i}^2} \underset{\mathrm{i}^2 = -1}{=} \sqrt{25}$$

(ii) Multiplikativität:
$z_1 z_2 = (-1 + 2\mathrm{i})(3 - 4\mathrm{i}) = (-3 - 8\mathrm{i}^2 + 6\mathrm{i} + 4\mathrm{i}) = 5 + 10\mathrm{i} \quad \Longrightarrow$

$$|z_1 z_2| = \sqrt{25 + 100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} = |z_2|\,|z_1|$$

(iii) Dreiecksungleichung:
$z_1 + z_2 = 2 - 2\mathrm{i} \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} ||z_1| - |z_2|| = 5 - \sqrt{5} = 2.7639 \leq \\ |z_1 + z_2| = \sqrt{8} = 2.8284 \leq |z_1| + |z_2| = \sqrt{5} + 5 = 7.2361 \end{aligned}$$

Formel von Euler-Moivre

Die Exponentialfunktion mit imaginärem Argument lässt sich mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen ausdrücken:

$$\exp(\mathrm{i}\varphi) = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$$

für $\varphi \in \mathbb{R}$. Der Kosinus und der Sinus entsprechen also dem Real- und Imaginärteil komplexer Zahlen mit Betrag 1 ($|\exp(\mathrm{i}\varphi)| = 1$).

Invertiert man die obige Formel, so folgt

$$\cos\varphi = \operatorname{Re} e^{\mathrm{i}\varphi} = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}\varphi} + e^{-\mathrm{i}\varphi}\right)$$
$$\sin\varphi = \operatorname{Im} e^{\mathrm{i}\varphi} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}\varphi} - e^{-\mathrm{i}\varphi}\right)\,.$$

Die Identitäten zwischen exp, cos und sin gehen auf Euler und Moivre zurück. Sie bilden die Grundlage für die geometrische Interpretation komplexer Zahlen und spielen in der Fourier-Analysis eine wichtige Rolle.

Beispiel

Berechnung trigonometrischer Funktionen für

$$\varphi_k = \pi/2^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

definiere

$$x_k = \operatorname{Re} \underbrace{\exp(\mathrm{i}\varphi_k)}_{z_k} = \cos\varphi_k$$

Andere trigonometrische Funktionen können algebraisch durch die Kosinus-Funktion ausgedrückt werden:

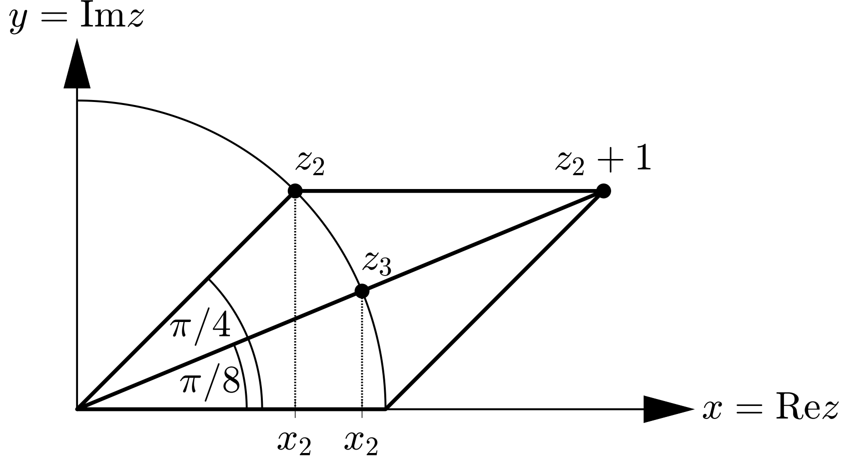
$$\sin\varphi_k = \sqrt{1 - x_k^2}, \quad \tan\varphi_k = \frac{\sin\varphi_k}{\cos\varphi_k} = \frac{\sqrt{1 - x_k^2}}{x_k}\,.$$

$k = 1, 2$:

$$x_1 = \cos(\pi/2) = 0, \quad x_2 = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$$

z_3 auf der Diagonale des Parallelogramms mit Eckpunkten $0, 1, z_2{+}1, z_2$, $|z_3| = 1 \quad \Longrightarrow$

$$z_3 = \frac{z_2+1}{|z_2+1|}$$



$$\mathrm{Re}\,(z_2+1) = x_2+1,\ \mathrm{Im}\,(z_2+1) = \mathrm{Im}\,z_2 = \sqrt{1-x_2^2} \qquad \Longrightarrow$$

$$x_3 = \mathrm{Re}\,z_3 = \frac{x_2+1}{\sqrt{(x_2+1)^2+1-x_2^2}} = \frac{x_2+1}{\sqrt{2x_2+2}} = \frac{\sqrt{2x_2+2}}{2}$$

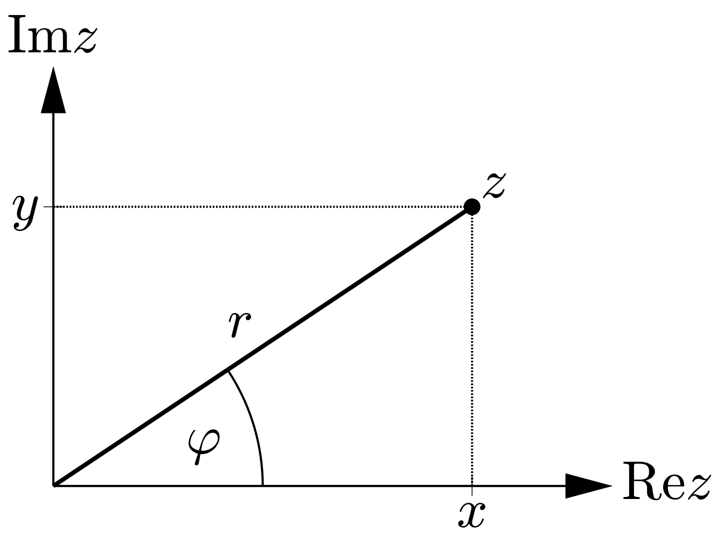
Einsetzen von $x_2 = \mathrm{Re}\,z_2 = \sqrt{2}/2 \quad \rightsquigarrow \quad x_3 = \sqrt{\sqrt{2}+2}/2$

allgemeine Rekursion $x_{k+1} = \sqrt{2x_k+2}/2 \quad \rightsquigarrow$

$$\cos(\pi/16) = x_4 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}+2}+2}/2, \quad \text{usw.}$$

Gaußsche Zahlenebene

Komplexe Zahlen $z = x + \mathrm{i}y$ lassen sich mit den Punkten der Ebene identifizieren. Der Betrag entspricht dem Abstand vom Ursprung, Real- und Imaginärteil sind die Projektionen auf die reelle bzw. imaginäre Achse, und die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$ ergibt sich durch Spiegelung an der reellen Achse.



In Polarkoordinaten erhält man aus der Formel von Euler-Moivre die Darstellung

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = r\exp(\mathrm{i}\varphi)$$

mit $r = |z|$. Der Winkel φ ist nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt und wird als Argument von z bezeichnet:

$$\varphi = \arg z\,.$$

Als Standardbereich (Hauptwert) wird das Intervall $(-\pi, \pi]$ vereinbart.

Es gilt

$$\tan\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \frac{y}{x}\,.$$

Das Argument $\arg z$ kann also mit Hilfe der Arcustangens-Funktion aus dem Quotienten y/x bestimmt werden. Dabei ist der richtige Zweig zu wählen, d.h. falls $x = \operatorname{Re} z < 0$ muß je nach Vorzeichen von x und y π oder $-\pi$ zum Wert der Umkehrfunktion addiert werden.

Bezeichnet $\varphi_H = \arctan(y/x) \in [-\pi/2, \pi/2]$, $(x, y) \neq (0, 0)$, den Winkel des Hauptzweigs des Arkustangens, so ist

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \varphi_H, & x \geq 0 \\ \varphi_H + \pi, & x < 0 \wedge y \geq 0 \\ \varphi_H - \pi, & x < 0 \wedge y < 0 \end{cases}$$

Für $x = y = 0$ ist φ beliebig und wird im allgemeinen null gesetzt.

Die Polardarstellung einiger komplexer Zahlen ist in der folgenden Tabelle angegeben.

z	1	-1	$\pm\mathrm{i}$	$1 \pm \mathrm{i}$	$-1 \pm \mathrm{i}$	$\sqrt{3} \pm \mathrm{i}$	$1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i}$
r	1	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2	2
φ	0	π	$\pm\pi/2$	$\pm\pi/4$	$\pm 3\pi/4$	$\pm\pi/6$	$\pm\pi/3$

Umwandlung in Polar- und Standardform

(i) Umwandlung von $z = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$ in Polarform:

$$r = |z| = \sqrt{1+3} = 2, \quad \varphi_H = \arctan(\sqrt{3}/1) = \pi/3$$

wegen $x = \operatorname{Re} z = 1 \geq 0$ keine Korrektur des Winkels:

$$\varphi = \arg\, z = \varphi_H = \pi/3$$

Formel von Euler-Moivre $\quad\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} z &= 2\,\exp(\mathrm{i}\,\pi/3) \\ &= 2\,(\cos(\pi/3) + \mathrm{i}\sin(\pi/3)) \end{aligned}$$

Kontrolle:

$$\cos(\pi/3) = 1/2, \quad \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \quad \checkmark$$

(ii) Umwandlung von $z = -1 + \mathrm{i}$ in Polarform:

$$r = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \varphi_H = \arctan(1/(-1)) = -\pi/4$$

wegen $x = \operatorname{Re}\, z = -1 < 0$ Korrektur des Winkels:
$y = \operatorname{Im}\, z = 1 \geq 0 \quad \Longrightarrow$

$$\varphi = \arg z = \varphi_H + \pi = -\pi/4 + \pi = 3\pi/4$$

Formel von Euler-Moivre $\quad\rightsquigarrow$

$$z = \sqrt{2}\exp(\mathrm{i}\,(3\pi/4))$$

(iii) Umwandlung von $z = 2\exp(\mathrm{i}\pi/6)$ in Standardform:
Formel von Euler-Moivre $\quad\rightsquigarrow$

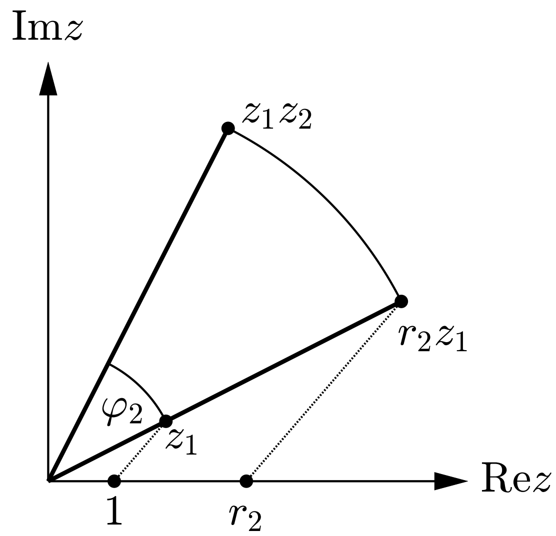
$$\begin{aligned} z &= 2(\cos(\pi/6) + \mathrm{i}\sin(\pi/6)) \\ &= \sqrt{3} + \mathrm{i} \end{aligned}$$

Multiplikation komplexer Zahlen

Das Produkt zweier komplexer Zahlen $z_k = x_k + \mathrm{i}y_k = r_k \exp(\mathrm{i}\varphi_k)$, $k = 1, 2$ ist

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\mathrm{i} = r_1 r_2 \exp(\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2))\,.$$

Geometrisch entspricht die Multiplikation mit einer komplexen Zahl $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$ einer Streckung um den Faktor r und einer Drehung um den Winkel φ wie in der Abbildung für $z = z_2$ ($r = r_2$, $\varphi = \varphi_2$) illustriert ist.



Beispiel

Multiplikation und Quadrat komplexer Zahlen

(i) Produkt von $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\exp(\mathrm{i}\,\pi/4)$ und $\sqrt{3} + 3\mathrm{i} = 2\sqrt{3}\exp(\mathrm{i}\,\pi/3)$

- Verwendung der Standardform:

$$(1 + \mathrm{i})(\sqrt{3} + 3\mathrm{i}) = \sqrt{3} - 3 + \left(\sqrt{3} + 3\right)\mathrm{i}$$

- Verwendung der Polarform:

$$\sqrt{2}\exp(\mathrm{i}\,\pi/4) \cdot 2\sqrt{3}\exp(\mathrm{i}\,\pi/3) = 2\sqrt{6}\exp(\mathrm{i}\,7\pi/12)$$

(ii) Quadrat von $z = 3 + \sqrt{3}\mathrm{i} = 2\sqrt{3}\exp(\mathrm{i}\,\pi/6)$

$$\begin{aligned} z^2 &= 9 + 6\sqrt{3}\mathrm{i} - 3 = 6 + 6\sqrt{3}\mathrm{i} \\ &= (2\sqrt{3})^2 \exp(2\mathrm{i}\pi/6) = 12\exp(\mathrm{i}\,\pi/3) \end{aligned}$$

Division komplexer Zahlen

Der Quotient zweier komplexer Zahlen,

$$z_k = x_k + \mathrm{i}y_k = r_k \exp(\mathrm{i}\varphi_k), \quad k = 1, 2$$

ist

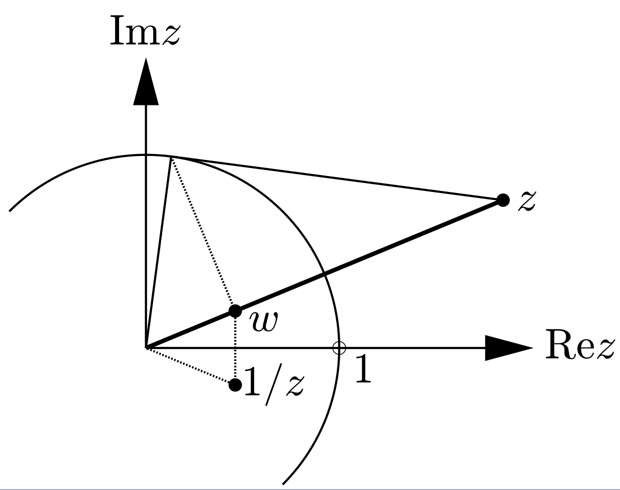
$$z_1/z_2 = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\,\mathrm{i} = \frac{r_1}{r_2}\exp(\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2))\,.$$

Speziell ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r^2}\bar{z} = \frac{1}{r}\exp(-\mathrm{i}\varphi) = \frac{x}{r^2} - \frac{y}{r^2}\,\mathrm{i}\,.$$

Geometrisch lässt sich der Kehrwert einer komplexen Zahl durch Spiegelung am Einheitskreis konstruieren, wie in der Abbildung veranschaulicht ist.

Bezeichnet w den Fußpunkt der Höhe auf der Hypothenuse des rechtwinkligen Dreiecks, das durch die Tangente von z an den Einheitskreis gebildet wird, dann erhält man $1/z$ durch Spiegelung an der reellen Achse: $1/z = \bar{w}$.



Beweis

(i) Quotient zweier komplexer Zahlen:

$$z_k = x_k + \mathrm{i}y_k = r_k \exp(i\varphi_k), \quad k = 1, 2$$

- Standardform

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_2y_1 - x_1y_2)\mathrm{i}}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

- Polarform

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \exp(\mathrm{i}\varphi_1)}{r_2 \exp(\mathrm{i}\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \exp(\mathrm{i}\varphi_1 - \mathrm{i}\varphi_2)$$

(ii) Kehrwert:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + \mathrm{i}y} = \frac{x - \mathrm{i}y}{(x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)} = \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{r^2} = \frac{1}{r} \exp(-\mathrm{i}\varphi)$$

(iii) Geometrische Konstruktion mit Hilfe des Satzes von Pythagoras: Quadrat der Länge der Kathete $=$ Produkt der Länge der Hypothenuse und der Länge des entsprechenden Hypothenusenabschnitts $\implies$

$$1^2 = |z|\,|w|\,,$$

d.h. korrekter Betrag von $\bar{w} \overset{!}{=} 1/z$:

$$|\bar{w}| = |w| = 1/|z| = |1/z|$$

Spiegelung an der reellen Achse $\rightsquigarrow$ Änderung des Vorzeichen des Arguments:

$$\arg \bar{w} = -\arg w = -\arg z = \arg(1/z)$$

Beispiel

Berechnung von $\dfrac{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})+2\exp(-\mathrm{i}\pi/6)}{\exp(\mathrm{i}\pi/2)(1-\mathrm{i})}$

Summe im Zähler in Standardform:

$$(1+\sqrt{3}\mathrm{i})+2\left(\sqrt{3}/2-\mathrm{i}/2\right)=(1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)\mathrm{i}$$

Produkt im Nenner in Polarform:

$$\exp(\mathrm{i}\pi/2)\cdot\sqrt{2}\exp(-\mathrm{i}\pi/4)=\sqrt{2}\exp(\mathrm{i}\pi/4)=1+\mathrm{i}$$

$\rightsquigarrow$ Quotient, erweitert mit $(1-\mathrm{i})$

$$\frac{((1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{2\sqrt{3}-2\mathrm{i}}{2}=2\exp(-\mathrm{i}\pi/6)$$

bzw. in Standardform

$$2(\cos(\pi/6)-\mathrm{i}\sin(\pi/6))=\sqrt{3}-\mathrm{i}$$

Beispiel

Analyse eines Schaltkreises mit komplexer Darstellung von Spannung und Stromstärke:

$$U(t)=U_0e^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)}\,,\quad I(t)=I_0e^{\mathrm{i}(\omega t+\psi)}$$

$\rightsquigarrow$ zeitunabhängiger komplexer Widerstand $Z=U(t)/I(t)$

Schaltelemente

Widerstand R Spule L Kondensator C

$Z=R$ $Z=\mathrm{i}\omega L$ $Z=(\mathrm{i}\omega C)^{-1}$

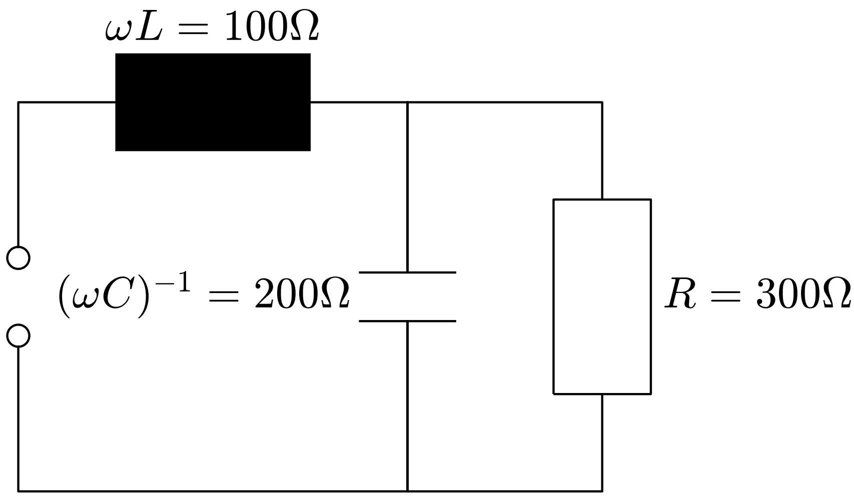
Addition der komplexen Widerstände bei Serienschaltung:

$$Z_{\text{gesamt}} = Z_1 + Z_2$$

Addition der Kehrwerte der komplexen Widerstände bei Parallelschaltung:

$$\frac{1}{Z_{\text{gesamt}}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \quad \Longrightarrow \quad Z_{\text{gesamt}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$\operatorname{Re} Z$: Wirkwiderstand, $\operatorname{Im} Z$: Blindwiderstand, $|Z|$: Scheinwiderstand oder Impedanz



Gesamtwiderstand

$$\begin{aligned}
Z_{\text{gesamt}} &= \mathrm{i}\omega L + \frac{R(\mathrm{i}\omega C)^{-1}}{R + (\mathrm{i}\omega C)^{-1}} = 100\mathrm{i}\Omega + \frac{300\Omega(-200\mathrm{i}\Omega)}{300\Omega - 200\mathrm{i}\Omega} \\
&= \left(\mathrm{i} - \frac{6\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}\right) \cdot 100\Omega = \frac{2-3\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}} \cdot 100\Omega = \frac{(2-3\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})}{13} \cdot 100\Omega \\
&= \frac{1200 - 500\mathrm{i}}{13}\Omega \approx (92.31 - 38.46\mathrm{i})\Omega
\end{aligned}$$

Impedanz

$$|Z_{\text{gesamt}}| = 100\sqrt{12^2 + 5^2}/13\Omega = 100\Omega$$

Wechselspannung $U_{\text{effektiv}} = 220\text{V}$ $\rightsquigarrow$ Effektivstrom

$$I_{\text{effektiv}} = \frac{U_{\text{effektiv}}}{|Z_{\text{gesamt}}|} = \frac{220\text{V}}{100\Omega} = 2.2\text{A}$$

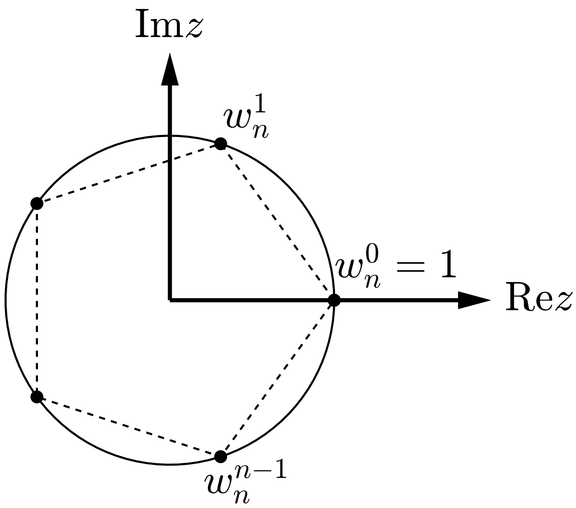
Einheitswurzeln

Die Gleichung $z^n = 1$ hat in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen

$$z_k = w_n^k, \quad w_n = \exp(2\pi\mathrm{i}/n), \quad k = 0, \ldots, n-1\,,$$

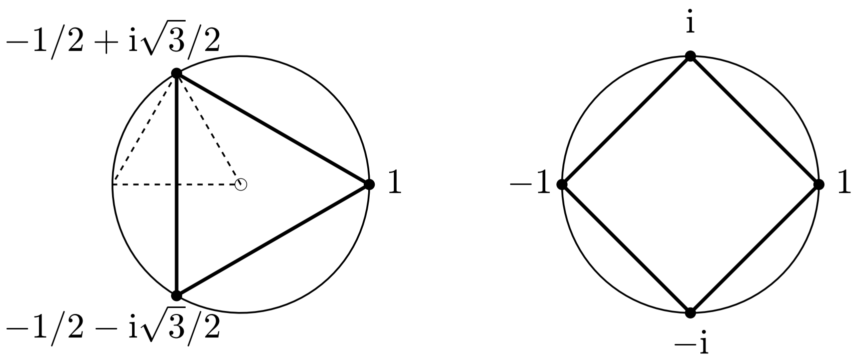
die als Einheitswurzeln bezeichnet werden.

Wie in der Abbildung veranschaulicht ist, bilden die Einheitswurzeln ein dem Einheitskreis einbeschriebenes regelmäßiges n-Eck.



Beispiel

Kubische und quartische Einheitswurzeln



Kubische Einheitswurzeln:
Satz des Pythagoras für die Hälfte des gestrichelten gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 1 $\quad\Longrightarrow$

$$\mathrm{Im}\,w_3^1 = \sqrt{1^2 - (1/2)^2} = \sqrt{3}/2\,,$$

d.h. $w_3^1 = -1/2 + \mathrm{i}\sqrt{3}/2$ und aufgrund der Symmetrie
$w_3^2 = -1/2 - \mathrm{i}\sqrt{3}/2$

alternativ: Berechnung von

$$z_k = \exp(2\pi \mathrm{i} k/3), \quad k = 0, 1, 2$$

mit der Formel von Euler-Moivre

$$\begin{aligned} z_0 &= \exp(0) = 1 \\ z_1 &= \exp(2\pi \mathrm{i}/3) = \cos(2\pi/3) + \mathrm{i}\sin(2\pi/3) = -1/2 + \mathrm{i}\sqrt{3}/2 \\ z_2 &= \exp(4\pi \mathrm{i}/3) = \cos(4\pi/3) + \mathrm{i}\sin(4\pi/3) = -1/2 - \mathrm{i}\sqrt{3}/2 \end{aligned}$$

mehrdeutige Wurzel: 3 verschiedene Werte für $z^{1/3}$

Beispiel

Lösen der Gleichung $z^3 + 3z^2\mathrm{i} - 3z + 7\mathrm{i} = 0$

Raten der Nullstelle $z_1 = \mathrm{i}$:

$$\mathrm{i}^3 + 3\mathrm{i}^2\mathrm{i} - 3\mathrm{i} + 7\mathrm{i} = -\mathrm{i} - 3\mathrm{i} - 3\mathrm{i} + 7\mathrm{i} = 0 \quad \checkmark$$

Polynomdivision $\leadsto$

$$\begin{array}{cccccccl} (\; z^3 & + & 3z^2\mathrm{i} & - & 3z & + & 7\mathrm{i} &) : (z - \mathrm{i}) = z^2 + 4z\mathrm{i} - 7 \\ z^3 & - & z^2\mathrm{i} & & & & & \\ \hline & & 4z^2\mathrm{i} & - & 3z & & & \\ & & 4z^2\mathrm{i} & + & 4z & & & \\ \hline & & & - & 7z & + & 7\mathrm{i} & \\ & & & - & 7z & + & 7\mathrm{i} & \\ \hline & & & & & & 0 & \end{array}$$

Lösungsformel für quadratische Gleichungen $\leadsto$

$$z_{2,3} = -2\mathrm{i} \pm \sqrt{(2\mathrm{i})^2 + 7} = -2\mathrm{i} \pm \sqrt{3}$$

Alternative Methode

binomische Formel $\rightsquigarrow$ äquivalente Gleichung

$$(z+\mathrm{i})^3 = -8\mathrm{i}$$

Darstellung komplexer Einheitswurzeln $\rightsquigarrow$

$$(-8\mathrm{i})^{1/3} = (2\mathrm{i})1^{1/3} = (2\mathrm{i})\exp(2\pi\mathrm{i}k/3), \quad k = 0,1,2$$

und

$$z_k = -\mathrm{i} + (2\mathrm{i})\exp(2\pi\mathrm{i}k/3), \quad k = 0,1,2$$

Potenzen einer komplexen Zahl

Um Potenzen komplexer Zahlen zu bilden, verwendet man am geeignetsten die Polarform $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$. Für $m \in \mathbb{Z}$ ist

$$z^m = r^m \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\,.$$

Die gleiche Formel bleibt auch für rationale Exponenten $m = p/q \in \mathbb{Q}$ richtig, allerdings ist das Ergebnis aufgrund der Mehrdeutigkeit der q-ten Einheitswurzel nicht eindeutig. Da die Gleichung $w^q = 1$ die q Lösungen

$$w = w_q^k, \quad w_q = \exp(2\pi\mathrm{i}/q)\,, \quad k = 0,\ldots,q-1$$

besitzt, erhalt man entsprechend

$$r^{p/q}\exp(\mathrm{i}p\varphi/q)\,w_q^{kp}, \quad k = 0,\ldots,q-1$$

als mögliche Werte für $z^{p/q}$.

Beispiel

Berechnung der möglichen Werte für

$$z = (-1+\mathrm{i})^{2/3}$$

Polarform: $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\varphi = \arctan(1/(-1)) + \pi = 3\pi/4 \quad \rightsquigarrow$

$$\left(\sqrt{2}\exp(3\pi\mathrm{i}/4)\right)^{2/3} = \sqrt[3]{2}\exp(\pi\mathrm{i}/2)w_3^{2k}, \quad k = 0, 1, 2\,,$$

mit $w_3 = \exp(2\pi\mathrm{i}/3)$

$\exp(\pi\mathrm{i}/2) = \mathrm{i}$, Formel von Euler-Moivre $\quad \rightsquigarrow \quad$ mögliche Werte:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[3]{2}\,\mathrm{i} \\
z_1 &= \sqrt[3]{2}\,\mathrm{i}\,\exp(4\pi\mathrm{i}/3) = \sqrt[3]{2}\,\mathrm{i}\,(\cos(4\pi/3) + \mathrm{i}\sin(4\pi/3)) \\
&= \sqrt[3]{2}\,(-\sin(4\pi/3) + \mathrm{i}\cos(4\pi/3)) = \sqrt[3]{2}(\sqrt{3}/2 - \mathrm{i}/2) \\
z_2 &= \sqrt[3]{2}\,\mathrm{i}\,\exp(8\pi\mathrm{i}/3) = \sqrt[3]{2}(-\sqrt{3}/2 - \mathrm{i}/2)
\end{aligned}$$

Probe

$$z_1^3 = \left(\sqrt[3]{2}\,\mathrm{i}\,\exp(4\pi\mathrm{i}/3)\right)^3 = 2\mathrm{i}^3\underbrace{\exp(4\pi\mathrm{i})}_{=1} = -2\,\mathrm{i} = (-1+\mathrm{i})^2$$

d.h. $z_1 = (-1+\mathrm{i})^{2/3}$

analoge Probe für z_0 und z_2

Beispiel

Mehrdeutigkeit von Potenzen für irrationale oder imaginäre Exponenten

benutze:

$$\exp(2\pi k\mathrm{i}) = 1 \quad \Longrightarrow \quad z^s = (z \cdot 1)^s = z^s \exp(2\pi k s\mathrm{i})$$

für $k \in \mathbb{Z}$

- unendlich viele Lösungen auf dem Einheitskreis:
$$\begin{aligned} \mathrm{i}^\pi &= \exp((\pi/2 + 2\pi k)\mathrm{i})^\pi \\ &= \exp\left(\mathrm{i}(\pi^2/2 + 2\pi^2 k)\right), \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$
- unendlich viele Lösungen auf einer Halbgeraden:
$$\begin{aligned} \pi^\mathrm{i} &= \exp(\ln \pi + 2\pi k\mathrm{i})^\mathrm{i} = \exp(\mathrm{i} \ln \pi - 2\pi k) \\ &= \exp(-2\pi k) \exp(\mathrm{i} \ln \pi), \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$
- unendlich viele Lösungen auf der positiven reellen Achse:
$$\begin{aligned} \mathrm{i}^\mathrm{i} &= \exp((\pi/2 + 2\pi k)\mathrm{i})^\mathrm{i} \\ &= \exp(-\pi/2 - 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Geraden und Kreise in der Gaußschen Zahlenebene

Die Gleichung

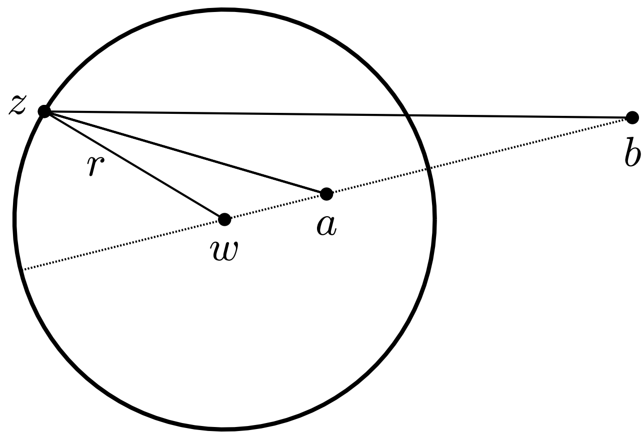
$$|z - a| = s|z - b|, \quad s \neq 1,$$

beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt

$$w = \frac{1}{1 - s^2} a - \frac{s^2}{1 - s^2} b$$

und Radius

$$r = \frac{s}{|1 - s^2|} |b - a|$$



in der Gaußschen Zahlenebene.
Eine Parametrisierung dieses Kreises ist $z = w + re^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi)$.
Ist $s < 1$ so liegt a im Inneren des Kreises und b außerhalb. Für $s > 1$ ist es umgekehrt.

Für $s = 1$ degeneriert der Kreis zu einer Geraden (Radius $r = \infty$), der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{ab}$.

Beweis

(i) Koordinatenform der Kreisgleichung:
setze

$$z = x + \mathrm{i}y, \quad a = a_1 + \mathrm{i}a_2, \quad b = b_1 + \mathrm{i}b_2$$

Quadrieren der Gleichung $|z - a| = s|z - b| \quad \rightsquigarrow$

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = s^2 \left((x - b_1)^2 + (y - b_2)^2\right)$$

bzw. nach Umformung

$$(1 - s^2)(x^2 + y^2) + c_1 x + c_2 y = d$$

Division durch $1 - s^2$ und quadratische Ergänzung $\quad \rightsquigarrow$

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = \sigma r^2 \text{ mit } \sigma \in \{-1, 1\}$$

Existenz von Lösungen $\quad \Longrightarrow \quad \sigma = 1$ (Kreisgleichung)

(ii) Mittelpunkt und Radius:
Einsetzen von $z = a + t(b - a)$ in $|z - a| = s|z - b| \quad \rightsquigarrow$

$$|t| = s|t - 1| \quad \Longleftrightarrow \quad t_1 = \frac{-s}{1 - s}, \quad t_2 = \frac{s}{1 + s}$$

$\rightsquigarrow$ zwei Schnittpunkte des Kreises mit der Geraden durch die Punkte a und b

$$z_1 = \frac{1}{1 - s} a - \frac{s}{1 - s} b, \quad z_2 = \frac{1}{1 + s} a + \frac{s}{1 + s} b$$

Mittelpunkt des Kreises

$$w = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = \frac{1}{1 - s^2} a - \frac{s^2}{1 - s^2} b$$

Radius

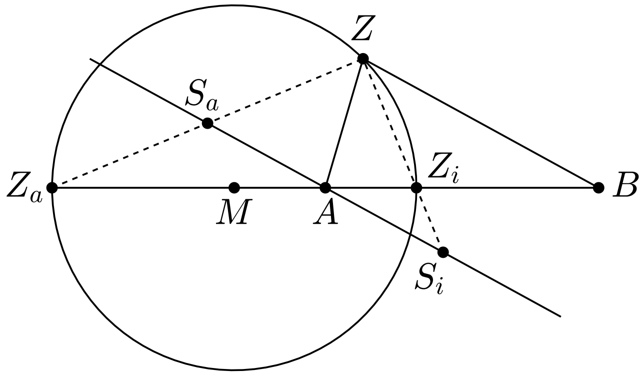
$$r = \frac{1}{2}|z_1 - z_2| = \left| \frac{(1 + s) - (1 - s)}{2(1 - s^2)} a - \frac{s(1 + s) + s(1 - s)}{2(1 - s^2)} b \right| = \frac{s}{|1 - s^2|} |b - a|$$

Alternative Methode

Geometrischer Beweis mit Hilfe des Kreises des Apollonius (200 v. Chr.)

$$|z-a| = s|z-b|$$

$\Longleftrightarrow$ festes Verhältnis der Abstände der Punkte Z zu zwei gegeben Punkten A und B:



$$|\overline{AZ}| \,/\, |\overline{ZB}| = s$$

Zum Beweis sei o.B.d.A. $s < 1$, d.h. A liegt innerhalb des Kreises.

Punkte Z_i und Z_a auf der Geraden durch AB, definiert durch

$$|\overline{AZ_i}| \,/\, |\overline{Z_iB}| = s, \quad |\overline{AZ_a}| \,/\, |\overline{Z_aB}| = s$$

Schneiden der Geraden durch Z und Z_i sowie der Geraden durch Z und Z_a mit der Geraden durch A parallel zu $\overline{ZB}$ $\rightsquigarrow$ Punkte S_i und S_a

gleiche Seitenverhältnisse (Strahlensätze) für die ähnlichen Dreiecke $\Delta(A, Z_i, S_i) \sim \Delta(B, Z_i, Z)$ und $\Delta(A, Z_a, S_a) \sim \Delta(B, Z_a, Z)$ $\Longrightarrow$

$$\frac{|\overline{AS_i}|}{|\overline{BZ}|} = \frac{|\overline{AZ_i}|}{|\overline{Z_iB}|} = s, \quad \frac{|\overline{AS_a}|}{|\overline{BZ}|} = \frac{|\overline{Z_aA}|}{|\overline{Z_aB}|} = s$$

$|\overline{AZ}| \,/\, |\overline{BZ}| = s \quad \Longrightarrow \quad |\overline{AZ}| = |\overline{AS_i}| = |\overline{AS_a}|$

Addition der Winkel in den zwei gleichschenkligen Dreiecken $\Delta(A, S_i, Z)$ und $\Delta(A, S_a, Z)$,

$$2\sphericalangle(A, Z, S_i) + 2\sphericalangle(A, Z, S_a) + \underbrace{\sphericalangle(Z, A, S_i) + \sphericalangle(Z, A, S_a)}_{=180^\circ} = 360^\circ$$

$\rightsquigarrow \quad \sphericalangle(Z_i, Z, Z_a) = \sphericalangle(A, Z, Z_i) + \sphericalangle(A, Z, Z_a) = 90^\circ$, d.h. nach dem Satz des Thales liegt Z auf dem Kreis um M mit Durchmesser $|\overline{Z_iZ_a}|$

Beispiel

Bestimmung von Mittelpunkt und Radius für den Kreis

$$C: |z| = \frac{1}{2}|z - 3\mathrm{i}|$$

(i) Mittelpunkt und Radius gemäß der allgemeinen Formeln:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{1-s^2}a - \frac{s^2}{1-s^2}b = \frac{1}{1-1/4}\,0 - \frac{1/4}{1-1/4}(3\mathrm{i}) = -\mathrm{i} \\ r &= \frac{s}{|1-s^2|}|b-a| = \frac{1/2}{1-1/4}|3\mathrm{i}| = 2 \end{aligned}$$

$(a = 0,\ b = 3\mathrm{i},\ s = 1/2)$

(ii) Bestimmung der Koordinatenform ($z = x + \mathrm{i}y$):
Quadrieren der Gleichung $|(x,y)| = |(x, y-3)|/2 \quad \rightsquigarrow$

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 - 6y + 9)$$

Umformungen $\quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} & 3x^2 + 3y^2 = -6y + 9 \\ \iff \quad & x^2 + y^2 + 2y = 3 \end{aligned}$$

quadratische Ergänzung $y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1 \quad \rightsquigarrow \quad$ Standardform

$$x^2 + (y+1)^2 = 2^2$$

Mittelpunkt: $(0, -1)$, Radius: 2