Logische Operationen

Logische Aussagen können durch die in der folgenden Tabelle angegebenen Operationen verknüpft werden.

Bezeichnung	Schreibweise	(Sprechweise)	wahr, genau dann wenn
Negation	$\neg A$	(nicht A)	A falsch ist
Konjunktion	$A \wedge B$	(A und B)	A und B wahr sind
Disjunktion	$A \vee B$	(A oder B)	A oder B wahr ist
Antivalenz	$A \not\equiv B$	(entweder A oder B)	A und B verschiedene Wahrheitswerte haben
Implikation	$A \Longrightarrow B$ $B \Longleftarrow A$	(aus A folgt B) (B folgt aus A)	A falsch oder B wahr ist
Äquivalenz	$A \Longleftrightarrow B$	(A ist äquivalent zu B)	A und B den gleichen Wahrheitswert haben

Um in logischen Ausdrücken Klammern zu sparen, wird festgelegt, dass $\neg$ stärker bindet als $\wedge$ sowie $\vee$ und diese wiederum stärker als $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ sowie $\not\equiv$.
Bei der Implikation ist zu beachten, dass B nur dann wahr sein muss, wenn A wahr ist. Aus falschen Voraussetzungen können sowohl richtige, als auch falsche Schlüsse gezogen werden.

Für die Oder-Verknüpfung wird auch das „$+$“-Symbol verwendet und für die Und-Verknüpfung das „$\cdot$“-Symbol. Verwendet man dann 0 für den Wert „falsch“ und interpretiert jeden anderen Wert als „wahr“, können die logischen Verknüpfungen durch Rechnen mit natürlichen Zahlen durchgeführt werden.

Vor allem in Computersprachen werden die aus dem Englischen stammenden Begriffe NOT (Negation), AND (Konjunktion), OR (Disjunktion), EXOR oder XOR (exclusive or, Antivalenz) und deren Negationen NAND (negierte Konjunktion), NOR (negierte Disjunktion) und NXOR (Äquivalenz) verwendet.

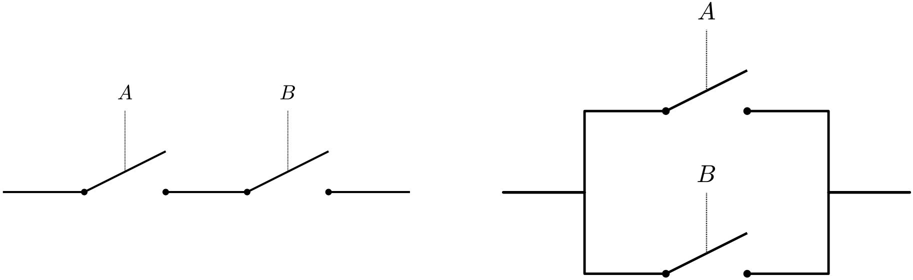
In der folgenden Tabelle sind die Wahrheitswerte der vorgestellten Verknüpfungen angegeben. Dabei steht w für wahr und f für falsch.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \not\equiv B$	$A \Longrightarrow B$	$A \Longleftrightarrow B$
w	w	f	w	w	f	w	w
w	f	f	f	w	w	f	f
f	w	w	f	w	w	w	f
f	f	w	f	f	f	w	w

Beispiel

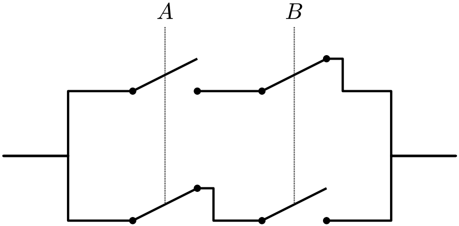
Darstellung der Verknüpfung von Aussagen mit Hilfe von Schaltern
(geschlossen $\Longleftrightarrow$ wahre Aussage, geöffnet $\Longleftrightarrow$ falsche Aussage)

Und-Verknüpfung (seriell) Oder-Verknüpfung (parallel)

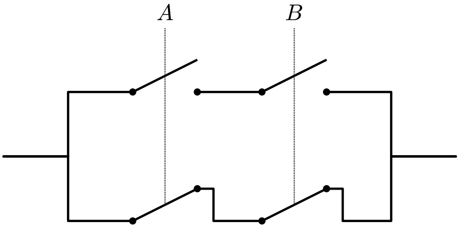


negierte Aussage: Schalter der bei falscher Aussage geschlossen ist

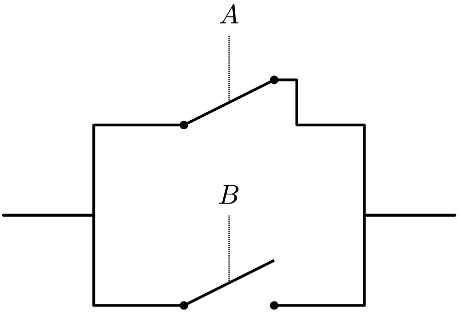
Antivalenz: $A \not\equiv B$ bzw. $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$



Äquivalenz: $A \Longleftrightarrow B$ bzw. $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

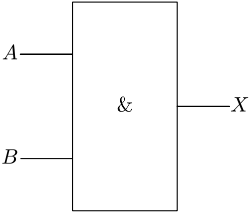


Implikation: $A \Longrightarrow B$ bzw. $\neg A \vee B$

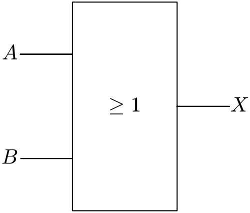


DIN 40900 Symbole für Schaltungen

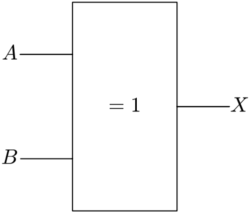
Konjunktion



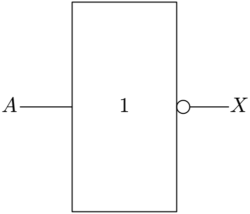
Disjunktion



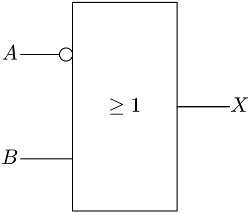
Antivalenz



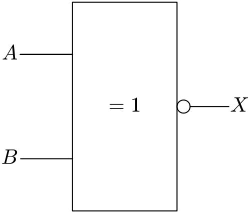
Negation



Implikation



Äquivalenz



wahr: 1, falsch: 0, Negation: Kreis

Identitäten und Regeln für logische Operationen

Für logische Operationen gelten die folgenden Identitäten.

- Assoziativgesetze:

$$\begin{aligned} (A \wedge B) \wedge C &= A \wedge (B \wedge C) \\ (A \vee B) \vee C &= A \vee (B \vee C) \end{aligned}$$

- Kommutativgesetze:

$$\begin{aligned} A \wedge B &= B \wedge A \\ A \vee B &= B \vee A \end{aligned}$$

- De Morgansche Regeln:

$$\begin{aligned} \neg(A \wedge B) &= (\neg A) \vee (\neg B) \\ \neg(A \vee B) &= (\neg A) \wedge (\neg B) \end{aligned}$$

- Distributivgesetze:

$$\begin{aligned}(A \wedge B) \vee C &= (A \vee C) \wedge (B \vee C)\\ (A \vee B) \wedge C &= (A \wedge C) \vee (B \wedge C)\end{aligned}$$

- Sonstige:

$$\begin{aligned}\neg(\neg A) &= A\\ A \wedge A &= A\\ A \vee A &= A\end{aligned}$$

- Alternative Darstellungen:

$$\begin{array}{rcccc}\text{Implikation:} & A \Longrightarrow B & = & \neg A \vee B & = & \neg A \Longleftarrow \neg B\\ \text{Äquivalenz:} & A \Longleftrightarrow B & = & (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) & & \\ \text{Antivalenz:} & A \not\equiv B & = & (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) & & \end{array}$$

Die alternativen Formulierungen werden oft in Beweisen benutzt.
Ein logischer Ausdruck, der unabhängig vom Wahrheitswert der auftretenden Aussagen immer wahr bzw. immer falsch ist, wird als Tautologie bzw. Kontradiktion bezeichnet. Ein solcher Ausdruck kann bei einer Umformung durch w (oder 1) bzw. f (oder 0) ersetzt werden. Insbesondere gelten die Identitäten:

$$\begin{aligned} A \vee \neg A = \mathrm{w} \quad &\text{bzw.} \quad A \wedge \neg A = \mathrm{f}\,, \\ A \vee \mathrm{w} = \mathrm{w} \quad &\text{bzw.} \quad A \wedge \mathrm{w} = A\,, \\ A \vee \mathrm{f} = A \quad &\text{bzw.} \quad A \wedge \mathrm{f} = \mathrm{f}\,. \end{aligned}$$

Beweis

Untersuchung aller Möglichkeiten für die Wahrheitswerte der Aussagen

Tabelle für die erste De Morgansche Regel

$$\neg(A \wedge B) \quad = \quad (\neg A) \vee (\neg B)$$

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \wedge B)$, $(\neg A) \vee (\neg B)$
w	w	w	f	f	f
w	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	w
f	f	f	w	w	w

analoge Argumentation für andere Regeln

Beispiel

Umformung der Aussage

$$\underbrace{|x-1|>1}_{A} \Longrightarrow \underbrace{(x<0)\vee(x>2)}_{B}$$

De Morgansche Regel $\neg(C \vee D) = \neg C \wedge \neg D \quad \Longrightarrow$

$$\neg B = \neg(x<0) \wedge \neg(x>2) = (x \geq 0) \wedge (x \leq 2) = 0 \leq x \leq 2$$

$(A \Longrightarrow B) \quad \Longleftrightarrow \quad (\neg B \Longrightarrow \neg A)$, d.h.

$$0 \leq x \leq 2 \Longrightarrow |x-1| \leq 1 \quad = \quad w$$

Alternative: benutze Definition der Implikation

$$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg A) \vee B = |x-1| \leq 1 \vee (x<0) \vee (x>2)$$

ebenfalls wahr, da für alle $x \in \mathbb{R}$ richtig.