# Komplexe Zahlen

Um auch Wurzeln aus negativen Zahlen bilden zu können, führt man eine imaginäre Einheit i als eine der Lösungen von

$$\mathrm{i}^2 = -1$$

ein und bezeichnet

$$\mathbb{C} = \{z = x + \mathrm{i}y :\ x, y \in \mathbb{R}\}$$

als die Menge der komplexen Zahlen. Dabei werden $x$ und $y$ Real- bzw. Imaginärteil genannt:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z\,.$$

Insbesondere ist $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Im} z = 0\}$.

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= x_1 + x_2 + \mathrm{i}(y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

von Addition und Multiplikation, die im Einklang mit $\mathrm{i}^2 = -1$ stehen, gelten für die arithmetischen Operationen die üblichen Rechenregeln.

# Beispiel

## Addition und Multiplikation komplexer Zahlen

(i) Addition:

$$\begin{aligned}(2+3\mathrm{i})+(4-5\mathrm{i}) &= (2+4)+(3+(-5))\mathrm{i}\\ &= 6-2\mathrm{i}\end{aligned}$$

(ii) Multiplikation:

$$\begin{aligned}(2+3\mathrm{i})\cdot(4-5\mathrm{i}) &= 8-10\mathrm{i}+12\mathrm{i}-\underbrace{15\mathrm{i}^2}_{=-15}\\ &= 23+2\mathrm{i}\end{aligned}$$

$(\mathrm{i}^2=-1)$

# Komplexe Konjugation

Für eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ definiert man die konjugiert komplexe Zahl

$$\bar{z} = x - \mathrm{i}y\,.$$

Geometrisch bedeutet die komplexe Konjugation eine Spiegelung an der $x$-Achse: $(x, y) \to (x, -y)$.

Die komplexe Konjugation ist mit den arithmetischen Operationen verträglich:

$$\overline{z_1 \circ z_2} = \bar{z}_1 \circ \bar{z}_2$$

für $\circ = +, -, *, /$.

## Beispiel

Verträglichkeit von komplexer Konjugation mit dem Bilden von Summe und Produkt der komplexen Zahlen $z = 2 - \mathrm{i}$, $w = 1 + 3\mathrm{i}$

(i) Addition:

$$\begin{array}{rcccl} \overline{z} + \overline{w} & = & (2+\mathrm{i}) + (1-3\mathrm{i}) & = & 3 - 2\mathrm{i} \\ \overline{z+w} & = & \overline{(2-\mathrm{i}) + (1+3\mathrm{i})} & = & \overline{3+2\mathrm{i}} \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ Übereinstimmung

(ii) Multiplikation:

$$\begin{array}{rcccccl} \overline{z}\,\overline{w} & = & (2+\mathrm{i})(1-3\mathrm{i}) & = & (2+3) + (1-6)\mathrm{i} & = & 5 - 5\mathrm{i} \\ \overline{zw} & = & \overline{(2-\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})} & = & \overline{(2+3) + (-1+6)\mathrm{i}} & = & \overline{5+5\mathrm{i}} \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ gleiches Resultat $5 - 5\mathrm{i}$

## Betrag einer komplexen Zahl

Der Betrag einer komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ ist als

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

definiert.

Für $z \in \mathbb{R}$ ist diese Definition konsistent mit der Definition der Betragsfunktion für reelle Zahlen und besitzt analoge Eigenschaften.

- Positivität:

$$|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$$

- Multiplikativität:

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \quad |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|,\, z_2 \neq 0$$

- Dreiecksungleichung:

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

## Beweis

(i) Positivität $\checkmark$

(ii) Multiplikativität:

- Produkt:

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= |(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2)|^2 = |(x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)|^2 \\ &= x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2\,, \end{aligned}$$

  da die Terme $\pm 2x_1x_2y_1y_2$ sich aufheben
  $\rightsquigarrow$ Übereinstimmung mit

$$|z_1|^2|z_2|^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$$

- Quotient:
  Anwendung der bewiesenen Identität für das Produkt von Beträgen
  $\rightsquigarrow$

$$|(z_1/z_2)||z_2| = |\underbrace{(z_1/z_2)z_2}_{z_1}| \quad \Longleftrightarrow \quad |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$$

(iii) Dreiecksungleichung:
Quadrieren der Ungleichungskette und Subtraktion von $|z_1|^2 + |z_2|^2 \quad \rightsquigarrow$

$$-2|z_1||z_2| \leq z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \leq 2|z_1||z_2|$$

$\operatorname{Re} z = (z + \bar{z})/2$, $\overline{u\,\bar{v}} = \bar{u}\,v \quad \rightsquigarrow \quad$ äquivalente Ungleichung

$$|\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)| \leq |z_1||z_2|$$

bzw., da $z_1\bar{z}_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2) = (x_1x_2 + y_1y_2) + (\ldots)\mathrm{i}$,

$$|x_1x_2 + y_1y_2| \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

erneutes Quadrieren und Subtraktion von $x_1^2x_2^2$, $y_1^2y_2^2 \quad \rightsquigarrow$

$$2x_1x_2y_1y_2 \leq x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2$$

$\checkmark$, da $(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geq 0$

## Beispiel

Illustration der Eigenschaften des Betrags für $z_1 = -1 + 2\mathrm{i}$, $z_2 = 3 - 4\mathrm{i}$

(i) Berechnung des Betrags (alternative Methoden):
$|x + \mathrm{i}y| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \rightsquigarrow$

$$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$|z|^2 = z\bar{z}$, dritte binomische Formel $\quad \rightsquigarrow$

$$|z_2| = \sqrt{(3 - 4\mathrm{i})(3 + 4\mathrm{i})} = \sqrt{9 - 16\mathrm{i}^2} \underset{\mathrm{i}^2=-1}{=} \sqrt{25}$$

(ii) Multiplikativität:
$z_1 z_2 = (-1 + 2\mathrm{i})(3 - 4\mathrm{i}) = (-3 - 8\mathrm{i}^2 + 6\mathrm{i} + 4\mathrm{i}) = 5 + 10\mathrm{i} \quad \Longrightarrow$

$$|z_1 z_2| = \sqrt{25 + 100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} = |z_2|\,|z_1|$$

(iii) Dreiecksungleichung:

$z_1 + z_2 = 2 - 2\mathrm{i} \qquad \Longrightarrow$

$$||z_1| - |z_2|| = 5 - \sqrt{5} = 2.7639 \leq$$
$$|z_1 + z_2| = \sqrt{8} = 2.8284 \leq |z_1| + |z_2| = \sqrt{5} + 5 = 7.2361$$