Kombinatorik von Mengen

Die folgende Tabelle gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, aus einer Menge mit n verschiedenen Elementen k Elemente auszuwählen, wobei unterschieden werden muß, ob die Reihenfolge eine Rolle spielt (nicht sortiert) und Wiederholungen zugelassen sind.

	nicht sortiert	sortiert
ohne Wiederholungen	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$
mit Wiederholungen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

Beweis

(i) Auswahl ohne Wiederholungen:

- Berücksichtigung der Reihenfolge $\rightsquigarrow$

  n Möglichkeiten für das erste,

  $(n-1)$ Möglichkeiten für das zweite,

  $\ldots$

  $(n-k+1)$ Möglichkeiten für das k-te Element

  Gesamtzahl der Möglichkeiten:

  $$n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

- Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge $\rightsquigarrow$ Division durch die Anzahl $k!$ der Permutationen von k Elementen, d.h.

  $$\binom{n}{k}$$

  Möglichkeiten

(ii) Auswahl mit Wiederholungen:

- Berücksichtigung der Reihenfolge $\rightsquigarrow$
  n Möglichkeiten für jedes Element, insgesamt

$$n^k$$

- Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge $\rightsquigarrow$
  Plazierung von $n-1$ Markierungen zwischen $n+k$ Punkten

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet \\ & & & & & \triangle & & \triangle & & & & \triangle & & \triangle & \end{array}$$

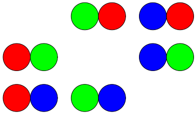
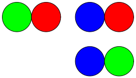
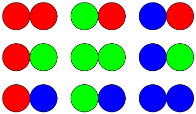
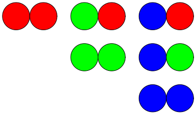
  um 1 verminderte Anzahl der Punkte zwischen der $(i-1)$-ten und i-ten Markierung $\widehat{=}$ Anzahl der Wiederholungen des i-ten Elements nach (i)

$$\binom{n+k-1}{n-1}$$

  mögliche Markierungen

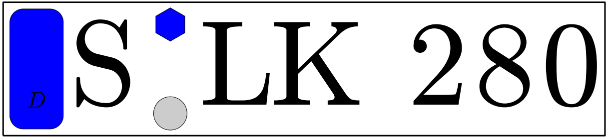
Beispiel

Anzahl der Möglichkeiten bei zweimaligem Ziehen aus einer Urne mit einer roten, einer grünen und einer blauen Kugel ($n = 3$, $k = 2$)

	nicht sortiert	sortiert
ohne Wiederholungen (ohne Zurücklegen)	$n \cdots (n-k+1) = 3 \cdot 2 = 6$ 	$\binom{n}{k} = \binom{3}{2} = 3$ 
mit Wiederholungen (mit Zurücklegen)	$n^k = 3^2 = 9$ 	$\binom{n+k-1}{k} = \binom{4}{2} = 6$ 

Beispiel

Deutsches Autokennzeichen:
Kombination von ≤ 3 Buchstaben für den Landkreis oder die Stadt, ≤ 2 weiteren Buchstaben und einer bis zu vierstelligen Zahl



26^n mögliche Kombinationen aus n Buchstaben $\quad \rightsquigarrow$

$$(26 + 26^2 + 26^3) \cdot (26 + 26^2) \cdot 9999 = 1.28 \cdot 10^{11}$$

mögliche Kennzeichen