Indirekter Beweis

Um zu zeigen, dass aus Voraussetzungen V eine Behauptung B folgt ($V \implies B$), kann man die Annahme, dass die Aussage B bei Gültigkeit der Voraussetzungen V falsch ist, zu einem Widerspruch führen:

$$V \wedge (\neg B) \implies F\,,$$

mit einer falschen Aussage F, insbesondere $F = \neg V$ oder $F = B$.

Speziell gilt

$$B = (\neg B \implies F)\,,$$

falls keine Voraussetzungen getroffen sind, d.h. die Aussage B ist wahr, wenn aus der Annahme, dass B falsch ist, die Gültigkeit einer falschen Aussage F gefolgert werden kann.

Beweis

(i) Beweismethode durch Widerspruch:

$$V \wedge (\neg B) \implies F$$

Umformung mit der Darstellung der Implikation als Disjunktion,
$C \implies D \quad = \quad \neg C \vee D$, und der De Morganschen Regel,
$\neg(C \wedge D) \quad = \quad \neg C \vee \neg D \quad \rightsquigarrow$

$$\neg(V \wedge (\neg B)) \vee F \quad = \quad (\neg V) \vee B \vee F\,,$$

d.h. die „Widerspruchsimplikation" ist wahr g.d.w. B wahr ist, denn $\neg V$ und F sind falsch

(ii) Äquivalente Darstellung von B:

$$\neg B \Longrightarrow F \quad = \quad B \vee F \quad = \quad B\,,$$

da F falsch ist

Beispiel

Indirekter Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$

Annahme, dass die Behauptung B falsch ist, d.h. es gilt (bzw. wahr ist)

$$\neg B: \sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \text{mit}\, p, q \in \mathbb{N} \wedge \mathrm{ggT}(p, q) = 1 \quad (\text{gekürzter Bruch}\, p/q)$$

und ggT dem größten gemeinsamen Teiler

Quadrieren und Multiplikation mit $q^2 \quad \rightsquigarrow$

$$2q^2 = p^2$$

$\implies \quad p^2$ und p gerade: $p = 2r$

$q^2 = 2r^2 \quad \implies \quad q$ gerade

Widerspruch zu $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$, d.h.

$$(\neg B) \implies F, \text{ eine falsche Aussage};$$

also ist B wahr