Geraden und Kreise in der Gaußschen Zahlenebene

Die Gleichung

$$|z-a| = s|z-b|, \quad s \neq 1\,,$$

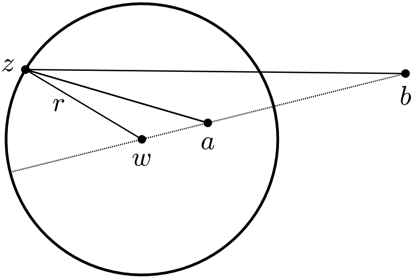
beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt

$$w = \frac{1}{1-s^2}a - \frac{s^2}{1-s^2}b$$

und Radius

$$r = \frac{s}{|1-s^2|}|b-a|$$

in der Gaußschen Zahlenebene.



Eine Parametrisierung dieses Kreises ist $z = w + re^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi)$.
Ist $s < 1$ so liegt a im Inneren des Kreises und b außerhalb. Für $s > 1$ ist es umgekehrt.

Für $s = 1$ degeneriert der Kreis zu einer Geraden (Radius $r = \infty$), der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{ab}$.

Beweis

(i) Koordinatenform der Kreisgleichung:
setze

$$z = x + \mathrm{i}y, \quad a = a_1 + \mathrm{i}a_2, \quad b = b_1 + \mathrm{i}b_2$$

Quadrieren der Gleichung $|z - a| = s|z - b| \quad \rightsquigarrow$

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = s^2 \left((x - b_1)^2 + (y - b_2)^2\right)$$

bzw. nach Umformung

$$(1 - s^2)(x^2 + y^2) + c_1 x + c_2 y = d$$

Division durch $1 - s^2$ und quadratische Ergänzung $\quad \rightsquigarrow$

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = \sigma r^2 \text{ mit } \sigma \in \{-1, 1\}$$

Existenz von Lösungen $\quad \Longrightarrow \quad \sigma = 1$ (Kreisgleichung)

(ii) Mittelpunkt und Radius:
Einsetzen von $z = a + t(b-a)$ in $|z-a| = s|z-b| \quad \rightsquigarrow$

$$|t| = s|t-1| \quad \Longleftrightarrow \quad t_1 = \frac{-s}{1-s}, \quad t_2 = \frac{s}{1+s}$$

$\rightsquigarrow$ zwei Schnittpunkte des Kreises mit der Geraden durch die Punkte a und b

$$z_1 = \frac{1}{1-s}a - \frac{s}{1-s}b, \quad z_2 = \frac{1}{1+s}a + \frac{s}{1+s}b$$

Mittelpunkt des Kreises

$$w = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = \frac{1}{1-s^2}a - \frac{s^2}{1-s^2}b$$

Radius

$$r = \frac{1}{2}|z_1 - z_2| = \left|\frac{(1+s)-(1-s)}{2(1-s^2)}a - \frac{s(1+s)+s(1-s)}{2(1-s^2)}b\right| = \frac{s}{|1-s^2|}|b-a$$

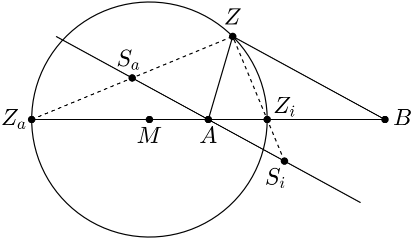
Alternative Methode

Geometrischer Beweis mit Hilfe des Kreises des Apollonius (200 v. Chr.)

$$|z - a| = s|z - b|$$

$\iff$ festes Verhältnis der Abstände der Punkte Z zu zwei gegeben Punkten A und B:

$$|\overline{AZ}| \,/\, |\overline{ZB}| = s$$



Zum Beweis sei o.B.d.A. $s < 1$, d.h. A liegt innerhalb des Kreises.

Punkte Z_i und Z_a auf der Geraden durch AB, definiert durch

$$|\overline{AZ_i}| \,/\, |\overline{Z_i B}| = s, \quad |\overline{AZ_a}| \,/\, |\overline{Z_a B}| = s$$

Schneiden der Geraden durch Z und Z_i sowie der Geraden durch Z und Z_a mit der Geraden durch A parallel zu $\overline{ZB}$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ Punkte S_i und S_a

gleiche Seitenverhältnisse (Strahlensätze) für die ähnlichen Dreiecke $\Delta(A, Z_i, S_i) \sim \Delta(B, Z_i, Z)$ und $\Delta(A, Z_a, S_a) \sim \Delta(B, Z_a, Z) \quad \Longrightarrow$

$$\frac{|\overline{AS_i}|}{|\overline{BZ}|} = \frac{|\overline{AZ_i}|}{|\overline{Z_i B}|} = s, \quad \frac{|\overline{AS_a}|}{|\overline{BZ}|} = \frac{|\overline{Z_a A}|}{|\overline{Z_a B}|} = s$$

$|\overline{AZ}| \,/\, |\overline{BZ}| = s \quad \Longrightarrow \quad |\overline{AZ}| = |\overline{AS_i}| = |\overline{AS_a}|$
Addition der Winkel in den zwei gleichschenkligen Dreiecken $\Delta(A, S_i, Z)$ und $\Delta(A, S_a, Z)$,

$$2\sphericalangle(A, Z, S_i) + 2\sphericalangle(A, Z, S_a) + \underbrace{\sphericalangle(Z, A, S_i) + \sphericalangle(Z, A, S_a)}_{=180^\circ} = 360^\circ$$

$\rightsquigarrow \quad \sphericalangle(Z_i, Z, Z_a) = \sphericalangle(A, Z, Z_i) + \sphericalangle(A, Z, Z_a) = 90^\circ$, d.h. nach dem Satz des Thales liegt Z auf dem Kreis um M mit Durchmesser $|\overline{Z_i Z_a}|$

Beispiel

Bestimmung von Mittelpunkt und Radius für den Kreis

$$C:\ |z| = \frac{1}{2}\,|z - 3\mathrm{i}|$$

(i) Mittelpunkt und Radius gemäß der allgemeinen Formeln:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{1-s^2}a - \frac{s^2}{1-s^2}b = \frac{1}{1-1/4}\,0 - \frac{1/4}{1-1/4}\,(3\mathrm{i}) = -\mathrm{i} \\ r &= \frac{s}{|1-s^2|}|b-a| = \frac{1/2}{1-1/4}|3\mathrm{i}| = 2 \end{aligned}$$

$(a = 0,\ b = 3\mathrm{i},\ s = 1/2)$

(ii) Bestimmung der Koordinatenform ($z = x + \mathrm{i}y$):
Quadrieren der Gleichung $|(x, y)| = |(x, y-3)|/2 \quad \rightsquigarrow$

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 - 6y + 9)$$

Umformungen $\quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} & 3x^2 + 3y^2 = -6y + 9 \\ \iff \quad & x^2 + y^2 + 2y = 3 \end{aligned}$$

quadratische Ergänzung $y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1 \quad \rightsquigarrow \quad$ Standardform

$$x^2 + (y+1)^2 = 2^2$$

Mittelpunkt: $(0, -1)$, Radius: 2