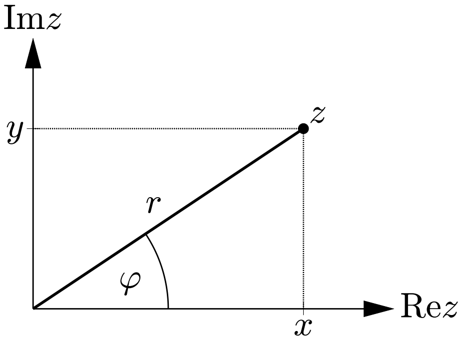
Gaußsche Zahlenebene

Komplexe Zahlen $z = x + \mathrm{i}y$ lassen sich mit den Punkten der Ebene identifizieren. Der Betrag entspricht dem Abstand vom Ursprung, Real- und Imaginärteil sind die Projektionen auf die reelle bzw. imaginäre Achse, und die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$ ergibt sich durch Spiegelung an der reellen Achse.



In Polarkoordinaten erhält man aus der Formel von Euler-Moivre die Darstellung

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = r\exp(\mathrm{i}\varphi)$$

mit $r = |z|$. Der Winkel φ ist nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt und wird als Argument von z bezeichnet:

$$\varphi = \arg z\,.$$

Als Standardbereich (Hauptwert) wird das Intervall $(-\pi, \pi]$ vereinbart.

Es gilt

$$\tan\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \frac{y}{x}\,.$$

Das Argument $\arg z$ kann also mit Hilfe der Arcustangens-Funktion aus dem Quotienten y/x bestimmt werden. Dabei ist der richtige Zweig zu wählen, d.h. falls $x = \operatorname{Re} z < 0$ muß je nach Vorzeichen von x und y π oder $-\pi$ zum Wert der Umkehrfunktion addiert werden.

Bezeichnet $\varphi_H = \arctan(y/x) \in [-\pi/2, \pi/2]$, $(x, y) \neq (0, 0)$, den Winkel des Hauptzweigs des Arkustangens, so ist

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \varphi_H, & x \geq 0 \\ \varphi_H + \pi, & x < 0 \wedge y \geq 0 \\ \varphi_H - \pi, & x < 0 \wedge y < 0 \end{cases}$$

Für $x = y = 0$ ist φ beliebig und wird im allgemeinen null gesetzt.

Die Polardarstellung einiger komplexer Zahlen ist in der folgenden Tabelle angegeben.

z	1	-1	$\pm\mathrm{i}$	$1 \pm \mathrm{i}$	$-1 \pm \mathrm{i}$	$\sqrt{3} \pm \mathrm{i}$	$1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i}$
r	1	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2	2
φ	0	π	$\pm\pi/2$	$\pm\pi/4$	$\pm 3\pi/4$	$\pm\pi/6$	$\pm\pi/3$

Beispiel

Umwandlung in Polar- und Standardform

(i) Umwandlung von $z = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$ in Polarform:

$$r = |z| = \sqrt{1+3} = 2, \quad \varphi_H = \arctan(\sqrt{3}/1) = \pi/3$$

wegen $x = \operatorname{Re} z = 1 \geq 0$ keine Korrektur des Winkels:

$$\varphi = \arg z = \varphi_H = \pi/3$$

Formel von Euler-Moivre $\quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} z &= 2\exp(\mathrm{i}\,\pi/3) \\ &= 2\,(\cos(\pi/3) + \mathrm{i}\sin(\pi/3)) \end{aligned}$$

Kontrolle:

$$\cos(\pi/3) = 1/2, \quad \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \quad \checkmark$$

(ii) Umwandlung von $z = -1 + \mathrm{i}$ in Polarform:

$$r = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \varphi_H = \arctan(1/(-1)) = -\pi/4$$

wegen $x = \mathrm{Re}\, z = -1 < 0$ Korrektur des Winkels:
$y = \mathrm{Im}\, z = 1 \geq 0 \quad \Longrightarrow$

$$\varphi = \arg z = \varphi_H + \pi = -\pi/4 + \pi = 3\pi/4$$

Formel von Euler-Moivre $\quad \rightsquigarrow$

$$z = \sqrt{2}\exp(\mathrm{i}\,(3\pi/4))$$

(iii) Umwandlung von $z = 2\exp(\mathrm{i}\pi/6)$ in Standardform:
Formel von Euler-Moivre $\quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} z &= 2(\cos(\pi/6) + \mathrm{i}\sin(\pi/6)) \\ &= \sqrt{3} + \mathrm{i} \end{aligned}$$