Formel von Euler-Moivre

Die Exponentialfunktion mit imaginärem Argument lässt sich mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen ausdrücken:

$$\exp(\mathrm{i}\varphi) = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$$

für $\varphi \in \mathbb{R}$. Der Kosinus und der Sinus entsprechen also dem Real- und Imaginärteil komplexer Zahlen mit Betrag 1 ($|\exp(\mathrm{i}\varphi)| = 1$).

Invertiert man die obige Formel, so folgt

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \operatorname{Re} e^{\mathrm{i}\varphi} = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}\varphi} + e^{-\mathrm{i}\varphi}\right) \\ \sin\varphi &= \operatorname{Im} e^{\mathrm{i}\varphi} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}\varphi} - e^{-\mathrm{i}\varphi}\right) . \end{aligned}$$

Die Identitäten zwischen exp, cos und sin gehen auf Euler und Moivre zurück. Sie bilden die Grundlage für die geometrische Interpretation komplexer Zahlen und spielen in der Fourier-Analysis eine wichtige Rolle.

Beispiel

Berechnung trigonometrischer Funktionen für

$$\varphi_k = \pi/2^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

definiere

$$x_k = \operatorname{Re} \underbrace{\exp(\mathrm{i}\varphi_k)}_{z_k} = \cos \varphi_k$$

Andere trigonometrische Funktionen können algebraisch durch die Kosinus-Funktion ausgedrückt werden:

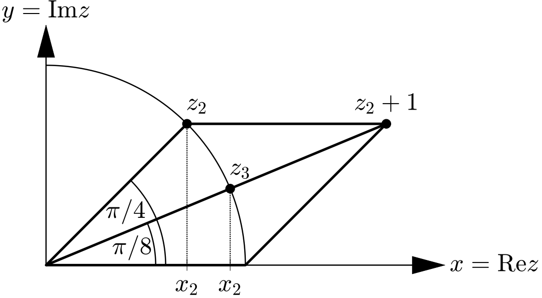
$$\sin \varphi_k = \sqrt{1 - x_k^2}, \quad \tan \varphi_k = \frac{\sin \varphi_k}{\cos \varphi_k} = \frac{\sqrt{1 - x_k^2}}{x_k}\,.$$

$k = 1, 2$:

$$x_1 = \cos(\pi/2) = 0, \quad x_2 = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$$

z_3 auf der Diagonale des Parallelogramms mit Eckpunkten $0, 1, z_2{+}1, z_2$, $|z_3| = 1 \quad \Longrightarrow$

$$z_3 = \frac{z_2 + 1}{|z_2 + 1|}$$



$\mathrm{Re}\,(z_2 + 1) = x_2 + 1$, $\mathrm{Im}\,(z_2 + 1) = \mathrm{Im}\, z_2 = \sqrt{1 - x_2^2} \quad \Longrightarrow$

$$x_3 = \mathrm{Re}\, z_3 = \frac{x_2 + 1}{\sqrt{(x_2 + 1)^2 + 1 - x_2^2}} = \frac{x_2 + 1}{\sqrt{2x_2 + 2}} = \frac{\sqrt{2x_2 + 2}}{2}$$

Einsetzen von $x_2 = \mathrm{Re}\, z_2 = \sqrt{2}/2 \quad \rightsquigarrow \quad x_3 = \sqrt{\sqrt{2} + 2}/2$
allgemeine Rekursion $x_{k+1} = \sqrt{2x_k + 2}/2 \quad \rightsquigarrow$

$$\cos(\pi/16) = x_4 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2} + 2} + 2}/2, \quad \text{usw.}$$