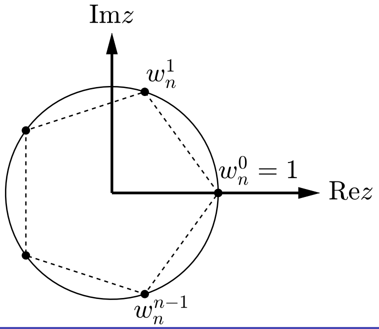
Einheitswurzeln

Die Gleichung $z^n = 1$ hat in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen

$$z_k = w_n^k, \quad w_n = \exp(2\pi \mathrm{i}/n), \quad k = 0, \dots, n-1\,,$$

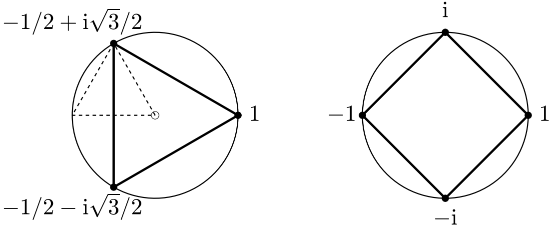
die als Einheitswurzeln bezeichnet werden.

Wie in der Abbildung veranschaulicht ist, bilden die Einheitswurzeln ein dem Einheitskreis einbeschriebenes regelmäßiges n-Eck.



Beispiel

Kubische und quartische Einheitswurzeln



Kubische Einheitswurzeln:
Satz des Pythagoras für die Hälfte des gestrichelten gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 1 $\quad \Longrightarrow$

$$\mathrm{Im}\, w_3^1 = \sqrt{1^2 - (1/2)^2} = \sqrt{3}/2\,,$$

d.h. $w_3^1 = -1/2 + \mathrm{i}\sqrt{3}/2$ und aufgrund der Symmetrie
$w_3^2 = -1/2 - \mathrm{i}\sqrt{3}/2$

alternativ: Berechnung von

$$z_k = \exp(2\pi \mathrm{i} k/3), \quad k = 0, 1, 2$$

mit der Formel von Euler-Moivre

$$\begin{aligned} z_0 &= \exp(0) = 1 \\ z_1 &= \exp(2\pi\mathrm{i}/3) = \cos(2\pi/3) + \mathrm{i}\sin(2\pi/3) = -1/2 + \mathrm{i}\sqrt{3}/2 \\ z_2 &= \exp(4\pi\mathrm{i}/3) = \cos(4\pi/3) + \mathrm{i}\sin(4\pi/3) = -1/2 - \mathrm{i}\sqrt{3}/2 \end{aligned}$$

mehrdeutige Wurzel: 3 verschiedene Werte für $z^{1/3}$

Beispiel

Lösen der Gleichung $z^3 + 3z^2\mathrm{i} - 3z + 7\mathrm{i} = 0$

Raten der Nullstelle $z_1 = \mathrm{i}$:

$$\mathrm{i}^3 + 3\mathrm{i}^2\mathrm{i} - 3\mathrm{i} + 7\mathrm{i} = -\mathrm{i} - 3\mathrm{i} - 3\mathrm{i} + 7\mathrm{i} = 0 \quad \checkmark$$

Polynomdivision $\quad \rightsquigarrow$

$$\begin{array}{cccccccccl}
(& z^3 & + & 3z^2\mathrm{i} & - & 3z & + & 7\mathrm{i} &) : (& z - \mathrm{i} \quad) = z^2 + 4z\mathrm{i} - 7 \\
 & z^3 & - & z^2\mathrm{i} & & & & & & \\
\hline
 & & & 4z^2\mathrm{i} & - & 3z & & & & \\
 & & & 4z^2\mathrm{i} & + & 4z & & & & \\
\hline
 & & & & - & 7z & + & 7\mathrm{i} & & \\
 & & & & - & 7z & + & 7\mathrm{i} & & \\
\hline
 & & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

Lösungsformel für quadratische Gleichungen $\quad \rightsquigarrow$

$$z_{2,3} = -2\mathrm{i} \pm \sqrt{(2\mathrm{i})^2 + 7} = -2\mathrm{i} \pm \sqrt{3}$$

Alternative Methode

binomische Formel $\quad\rightsquigarrow\quad$ äquivalente Gleichung

$$(z+\mathrm{i})^3 = -8\mathrm{i}$$

Darstellung komplexer Einheitswurzeln $\quad\rightsquigarrow$

$$(-8\mathrm{i})^{1/3} = (2\mathrm{i})1^{1/3} = (2\mathrm{i})\exp(2\pi\mathrm{i}k/3), \quad k = 0, 1, 2$$

und

$$z_k = -\mathrm{i} + (2\mathrm{i})\exp(2\pi\mathrm{i}k/3), \quad k = 0, 1, 2$$