Division komplexer Zahlen

Der Quotient zweier komplexer Zahlen,

$$z_k = x_k + \mathrm{i}y_k = r_k \exp(\mathrm{i}\varphi_k), \quad k = 1, 2$$

ist

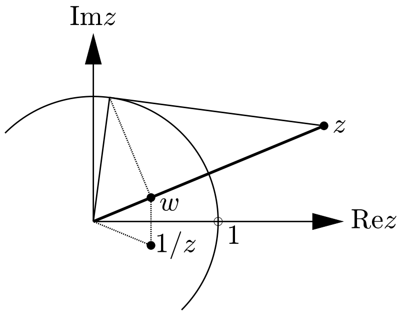
$$z_1/z_2 = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\,\mathrm{i} = \frac{r_1}{r_2}\exp(\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2))\,.$$

Speziell ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r^2}\bar{z} = \frac{1}{r}\exp(-\mathrm{i}\varphi) = \frac{x}{r^2} - \frac{y}{r^2}\,\mathrm{i}\,.$$

Geometrisch lässt sich der Kehrwert einer komplexen Zahl durch Spiegelung am Einheitskreis konstruieren, wie in der Abbildung veranschaulicht ist.

Bezeichnet w den Fußpunkt der Höhe auf der Hypothenuse des rechtwinkligen Dreiecks, das durch die Tangente von z an den Einheitskreis gebildet wird, dann erhält man $1/z$ durch Spiegelung an der reellen Achse: $1/z = \bar{w}$.



Beweis

(i) Quotient zweier komplexer Zahlen:

$$z_k = x_k + \mathrm{i}y_k = r_k \exp(i\varphi_k), \quad k = 1, 2$$

- Standardform

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_2y_1 - x_1y_2)\mathrm{i}}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

- Polarform

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \exp(\mathrm{i}\varphi_1)}{r_2 \exp(\mathrm{i}\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \exp(\mathrm{i}\varphi_1 - \mathrm{i}\varphi_2)$$

(ii) Kehrwert:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+\mathrm{i}y} = \frac{x-\mathrm{i}y}{(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)} = \frac{\bar{z}}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{r^2} = \frac{1}{r}\ \exp(-\mathrm{i}\varphi)$$

(iii) Geometrische Konstruktion mit Hilfe des Satzes von Pythagoras: Quadrat der Länge der Kathete $=$ Produkt der Länge der Hypothenuse und der Länge des entsprechenden Hypothenusenabschnitts $\quad\Longrightarrow$

$$1^2 = |z|\,|w|\,,$$

d.h. korrekter Betrag von $\bar{w} \stackrel{!}{=} 1/z$:

$$|\bar{w}| = |w| = 1/|z| = |1/z|$$

Spiegelung an der reellen Achse $\quad\rightsquigarrow\quad$ Änderung des Vorzeichen des Arguments:

$$\arg \bar{w} = -\arg w = -\arg z = \arg(1/z)$$

Beispiel

Berechnung von $\dfrac{(1+\sqrt{3}\mathrm{i}) + 2\exp(-\mathrm{i}\pi/6)}{\exp(\mathrm{i}\pi/2)(1-\mathrm{i})}$

Summe im Zähler in Standardform:

$$(1+\sqrt{3}\mathrm{i}) + 2\left(\sqrt{3}/2 - \mathrm{i}/2\right) = (1+\sqrt{3}) + (\sqrt{3}-1)\mathrm{i}$$

Produkt im Nenner in Polarform:

$$\exp(\mathrm{i}\pi/2)\cdot\sqrt{2}\exp(-\mathrm{i}\pi/4) = \sqrt{2}\exp(\mathrm{i}\pi/4) = 1+\mathrm{i}$$

$\leadsto$ Quotient, erweitert mit $(1-\mathrm{i})$

$$\frac{((1+\sqrt{3}) + (\sqrt{3}-1)\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{2\sqrt{3}-2\mathrm{i}}{2} = 2\exp(-\mathrm{i}\pi/6)$$

bzw. in Standardform

$$2(\cos(\pi/6) - \mathrm{i}\sin(\pi/6)) = \sqrt{3} - \mathrm{i}$$

Beispiel

Analyse eines Schaltkreises mit komplexer Darstellung von Spannung und Stromstärke:

$$U(t) = U_0 e^{\mathrm{i}(\omega t + \varphi)}\,, \quad I(t) = I_0 e^{\mathrm{i}(\omega t + \psi)}$$

$\rightsquigarrow$ zeitunabhängiger komplexer Widerstand $Z = U(t)/I(t)$

Schaltelemente

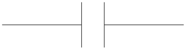
Widerstand R

$Z = R$

Spule L

$Z = \mathrm{i}\omega L$

Kondensator C



$Z = (\mathrm{i}\omega C)^{-1}$

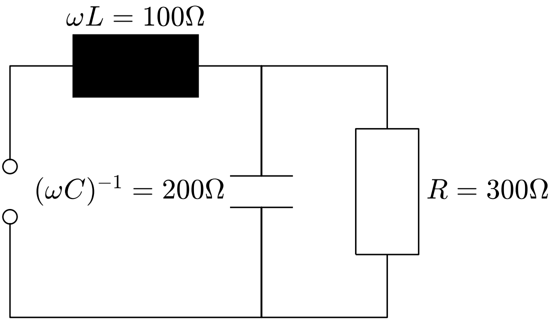
Addition der komplexen Widerstände bei Serienschaltung:

$$Z_{\text{gesamt}} = Z_1 + Z_2$$

Addition der Kehrwerte der komplexen Widerstände bei Parallelschaltung:

$$\frac{1}{Z_{\text{gesamt}}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \quad \Longrightarrow \quad Z_{\text{gesamt}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$\operatorname{Re} Z$: Wirkwiderstand, $\operatorname{Im} Z$: Blindwiderstand, $|Z|$: Scheinwiderstand oder Impedanz



Gesamtwiderstand

$$\begin{aligned} Z_{\text{gesamt}} &= \mathrm{i}\omega L + \frac{R(\mathrm{i}\omega C)^{-1}}{R + (\mathrm{i}\omega C)^{-1}} = 100\mathrm{i}\Omega + \frac{300\Omega(-200\mathrm{i}\Omega)}{300\Omega - 200\mathrm{i}\Omega} \\ &= \left(\mathrm{i} - \frac{6\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}\right) \cdot 100\Omega = \frac{2-3\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}} \cdot 100\Omega = \frac{(2-3\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})}{13} \cdot 100\Omega \\ &= \frac{1200-500\mathrm{i}}{13}\Omega \approx (92.31 - 38.46\mathrm{i})\Omega \end{aligned}$$

Impedanz

$$|Z_{\text{gesamt}}| = 100\sqrt{12^2+5^2}/13\Omega = 100\Omega$$

Wechselspannung $U_{\text{effektiv}} = 220\text{V} \quad \rightsquigarrow \quad$ Effektivstrom

$$I_{\text{effektiv}} = \frac{U_{\text{effektiv}}}{|Z_{\text{gesamt}}|} = \frac{220\text{V}}{100\Omega} = 2.2\text{A}$$