Abbildung

Unter einer Abbildung f von einer Menge A in eine Menge B versteht man eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ eindeutig ein bestimmtes $b = f(a) \in B$ zuordnet:

$$f:\, A \longrightarrow B\,.$$

Für die Elementzuordnung verwendet man die Schreibweise

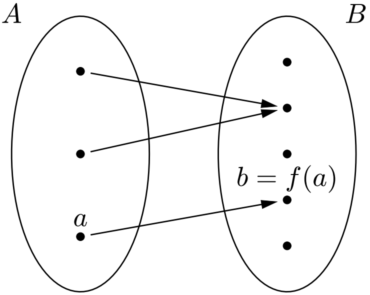
$$a \mapsto b = f(a)$$

und bezeichnet b als das Bild von a, bzw. a als ein Urbild von b.

Ist $U \subseteq A$, so heißt $f(U) = \{f(a) :\, a \in U\} \subseteq B$ das Bild von U und für $V \subseteq B$ heißt $f^{-1}(V) = \{a :\, f(a) \in V\} \subseteq A$ das Urbild von V unter der Abbildung f.

Die Menge $f(A)$ heißt Wertebereich und A Definitionsbereich der Abbildung f.

Eine Abbildung kann man folgendermaßen illustrieren.



Wie aus dem Bild ersichtlich ist, müssen nicht alle Elemente aus B als Bild eines Elementes aus A auftreten und ein Element aus B darf auch Bild mehrerer Elemente aus A sein, d.h. Elemente aus der Bildmenge können mehrere Urbilder haben. Es muss allerdings für jedes Element aus A ein eindeutiges Bild geben, das heißt von jedem a muss genau ein Pfeil ausgehen.

Statt Abbildung verwendet man auch den Begriff Funktion, insbesondere in der reellen und komplexen Analysis.

Eigenschaften von Abbildungen

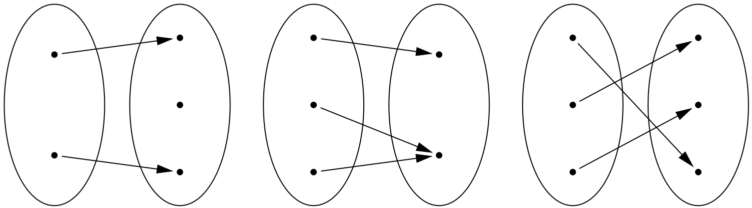
Eine Abbildung

$$f : A \longrightarrow B$$

zwischen zwei Mengen A und B heißt

- injektiv, falls $f(a) \neq f(a')$ für alle $a, a' \in A$ mit $a \neq a'$
- surjektiv, falls es für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$
- bijektiv, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Diese Begriffe lassen sich anhand von Mengendiagrammen illustrieren:



injektiv surjektiv bijektiv

Beispiel

Abbildungen zwischen den natürlichen Zahlen

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

(i) Bijektiv:

$$f(n) = n - (-1)^n$$

vertauscht benachbarte Zahlen

$$\begin{array}{ccl} 1 & \mapsto & 1 - (-1)^1 = 1 + 1 = 2 \\ 2 & \mapsto & 2 - (-1)^2 = 2 - 1 = 1 \\ 3 & \mapsto & 4 \\ 4 & \mapsto & 3 \\ & \ldots & \end{array}$$

(ii) Surjektiv:

$$n \mapsto \text{ Anzahl der Dezimalziffern}$$

zu jeder Ziffernzahl $f(n)$ gibt es ein Urbild n.

(iii) Injektiv:

$$f(n) = n^2$$

für $n, n' \in \mathbb{N}$ gilt: $n \neq n' \implies n^2 \neq n'^2$

(iv) Weder surjektiv noch injektiv:

$$n \mapsto \text{ nächstgrößere Primzahl}$$

nicht surjektiv, da nur Primzahlen als Bilder auftreten
nicht injektiv, da z.B. $f(14) = 17 = f(15)$