# Zyklische Matrizen

Bei einer zyklischen $n \times n$-Matrix werden die Spalten durch zyklisches Verschieben der ersten Spalte gebildet:

$$C = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}, \quad \text{d.h. } c_{j,k} = a_{j-k \bmod n} \,.$$

Die zyklische Struktur bleibt bei Transposition, Multiplikation und Invertierung erhalten.

## Beweis

(i) Transposition: $\checkmark$

(ii) Produkt:

$Q = CD, \quad c_{i,j} = a_{i-j \bmod n}, \; d_{i,j} = b_{i-j \bmod n} \quad \Longrightarrow$

$$q_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i-j \bmod n}\, b_{j-k \bmod n}$$

Substitution $j = j' + k \quad \rightsquigarrow$

$$q_{i,k} = \sum_{j'=1-k}^{n-k} a_{(i-k)-j' \bmod n}\, b_{j' \bmod n}$$

Modulo-Arithmetik $\Longrightarrow$ Invarianz der Summanden bei Ersetzen von $j'$ durch $j' \pm n$

$\rightsquigarrow$ Änderung des Summationsbereiches

$$\begin{aligned} \{1-k, \ldots, 0, 1, \ldots, n-k\} &\to \{n+1-k, \ldots, n, 1, \ldots, n-k\} \\ &= \{1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $q_{i,k}$ hängt nur von $(i-k) \bmod n$ ab, d.h. $Q$ ist zyklisch: $q_{i,k} = p_{i-k \bmod n}$

(iii) Inverse:
$D = C^{-1}$, $c_{j,k} = a_{j-k \bmod n}$
Für die erste Zeile $(b_0, b_{n-1}, \ldots, b_1)$ von $D$ gilt wegen $E = DC$

$$\delta_{1,\ell} = \sum_{k=1}^{n} b_{1-k \bmod n}\, a_{k-\ell \bmod n}$$

zeige $d_{i,k} = b_{i-k \bmod n}$:
wähle dazu $\ell = j - i + 1 \bmod n$, substituiere $k' = k + i - 1$ und erhalte

$$\begin{aligned}\delta_{i,j} = \delta_{1,j-i+1 \bmod n} &= \sum_{k=1}^{n} b_{1-k \bmod n}\, a_{k-j+i-1 \bmod n} \\ &= \sum_{k'=i}^{i+n-1} b_{i-k' \bmod n} a_{k'-j \bmod n}\end{aligned}$$

Verschiebung des Summationsbereiches, $\{i, \ldots, i+n-1\} \to \{1, \ldots, n\}$
$\Longrightarrow \quad d_{i,k} = b_{i-k \bmod n}$ erfüllt $E = DC$ und ist somit inverse Matrix

## Beispiel

Produkt $CD$ und Inverse $C^{-1}$ für die zyklischen Matrizen

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- Produkt:

$$CD = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 7 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

- Inverse:

$$C^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$