Zeilenstufenform

Die Zeilenstufenform oder Echelon-Form D einer $m \times n$-Matrix A ist eine Verallgemeinerung der Dreiecksform quadratischer Matrizen:

$$D = \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & \boxed{d_{1,i_1}} & * \dots * & & & * \\ & & \ddots & & & \\ & & 0 \dots 0 & \boxed{d_{1,i_r}} & * \dots * & \\ & & & & 0 \dots 0 & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \dots 0 \end{pmatrix}.$$

Für die ersten von Null verschiedenen Elemente $p_j = d_{j,i_j}$ (Pivots) der Zeilen muss $i_{j+1} > i_j$ gelten, d.h. die Anzahl der führenden Nullen nimmt sukzessive um mindestens 1 zu. Insbesondere bilden die $m - r$ Nullzeilen (wenn vorhanden, d.h., wenn $r < m$) den unteren Block der Matrix D. Die Anzahl r der Pivots ist der Rang von D.

Bei der reduzierten Zeilenstufenform wird zusätzlich verlangt, dass

$$d_{j,i_j} = 1,\ d_{k,i_j} = 0 \text{ für } k \neq j, \quad j = 1, \dots, r\,,$$

d.h. außer der 1 in Position (j, i_j) enthält die Pivot-Spalte i_j nur Nullen.

Analog zur Gauß-Elimination für quadratische Systeme lässt sich ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer $m \times n$-Koeffizientenmatrix durch Vertauschung von Gleichungen und Addition von Gleichungsvielfachen auf Zeilenstufenform transformieren:

$$Ax = b \quad \to \quad Dx = c\,.$$

Der ℓ-te Transformationsschritt verläuft wie folgt:

- Ein von Null verschiedenes Element der Koeffizientenmatrix mit Zeilenindex $k \geq \ell$ und kleinstem Spaltenindex i_ℓ wird als Pivot gewählt und die Gleichung k mit der Gleichung ℓ vertauscht.
- Existiert kein Pivot-Element, so ist die Zeilenstufenform erreicht.
- Andernfalls werden in den Gleichungen $\ell + 1, \ldots, m$ durch Bilden von Linearkombinationen mit der ℓ-ten Gleichung,

  $$\text{Gleichung}\, j \leftarrow \alpha_j * \text{Gleichung}\, j \,+\, \beta_j * \text{Gleichung}\, \ell, \quad j = \ell + 1, \ldots, m\,,$$

  die Terme mit der i_ℓ-ten Unbekannten annulliert (Koeffizient von x_{i_ℓ} in Gleichung $j \to 0$ für $j > \ell$).

Bei Transformation auf reduzierte Zeilenstufenform werden die Linearkombinationen auch für $j = 1, \ldots, \ell - 1$ gebildet, nachdem zuvor die Gleichung ℓ durch das Pivot-Element dividiert wurde (Koeffizient von x_{i_ℓ} $\rightarrow 1$).

Analog zur Gauß-Elimination werden die Modifikationen des Gleichungssystems mit Hilfe eines Tableaus durchgeführt,

$$A|b \rightarrow D|c\,,$$

wobei die sich ändernden Koeffizienten und Elemente der rechten Seite zeilenweise aufgelistet werden.

Beispiel

Transformation des Gleichungssystems

$$
\begin{array}{rrrrrrrcr}
 & & x_3 & +5x_4 & -3x_5 & & +9x_7 & = & -1 \\
2x_1 & +3x_2 & & -x_4 & +4x_5 & +x_6 & -2x_7 & = & 2 \\
4x_1 & +6x_2 & +x_3 & +3x_4 & +5x_5 & +2x_6 & +5x_7 & = & 3 \\
-2x_1 & -3x_2 & +x_3 & +6x_4 & -7x_5 & -x_6 & +6x_7 & = & 0 \\
 & & x_3 & +5x_4 & -3x_5 & & +9x_7 & = & 4
\end{array}
$$

auf Zeilenstufenform

Modifikation des Tableaus $A|b$ aus Koeffizientenmatrix und rechter Seite (erste 5 Zeilen des nachfolgenden Schemas) mit Gauß-Operationen (Vertauschung von Zeilen und Addition von Zeilenvielfachen)

2 modifierte Tableaus mit 4 und 3 Zeilen im Schema für das betrachtete Beispiel

A							b	α, β			
0	0	1	5	-3	0	9	-1	1			
$\boxed{\mathbf{2}}$	**3**	**0**	$\mathbf{-1}$	**4**	**1**	$\mathbf{-2}$	**2**	0	-2	1	0
4	6	1	3	5	2	5	3		1		
-2	-3	1	6	-7	-1	6	0			1	
0	0	1	5	-3	0	9	4				1
0	**0**	$\boxed{\mathbf{1}}$	**5**	$\mathbf{-3}$	**0**	**9**	$\mathbf{-1}$	-1	-1	-1	
0	0	1	5	-3	0	9	-1	1			
0	0	1	5	-3	0	4	2		1		
0	0	1	5	-3	0	9	4			1	
0	0	0	0	0	0	0	0				
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	$\boxed{\mathbf{-5}}$	**3**				
0	0	0	0	0	0	0	5				

Schritt 1:

Wahl des Pivot-Elements (ungleich Null, kleinster Spaltenindex)

$\rightsquigarrow$ fett gedruckte Zeile 2

Ersetzen der Zeilen 1,3,4,5 jeweils durch eine Linearkombination mit der Pivot-Zeile mit Koeffizienten α, β in den entsprechenden 4 Spalten rechts im Schema, z.B.

$$\text{Zeile}\,3 \leftarrow (-2) * \text{Zeile } 2 + (1) * \text{Zeile}\,3$$

$\rightsquigarrow$ nächster Block (4 Zeilen) des Schemas (Pivot-Zeile 2 wird nicht nochmals gelisted)

Schritt 2:

Zeile 1 $\rightsquigarrow$ Pivot-Zeile (fett)

Abziehen der Pivot-Zeile von den anderen 3 Zeilen (Koeffizienten $\alpha = -1, \beta = 1$)

$\rightsquigarrow$ letzter Block (3 Zeilen)

Schritt 3:

keine weiteren Additionen von Zeilenvielfachen, da außer der Pivot-Zeilen nur Null-Zeilen vorhanden sind

$\rightsquigarrow$ Zeilenstufenform bestehend aus den Pivot- und Nullzeilen resultierendes Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\text{-5}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Koeffizientenmatrix mit Rang gleich 3 (Anzahl der Pivots)
keine Lösung, da fünftes Element der rechten Seite ungleich Null

Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems in Zeilenstufenform

Ein lineares Gleichungssystem $Dx = c$ in Zeilenstufenform,

$$\begin{pmatrix} 0\dots 0 & \boxed{p_1} & *\dots * & & & & * \\ & & \ddots & & & & \\ & & 0\dots 0 & \boxed{p_r} & *\dots * & & \\ & & & & 0\dots 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0\dots 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \\ c_{r+1} \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix},$$

mit Pivots $p_j = d_{j,i_j}$ ist genau dann lösbar, wenn $c_{r+1} = \cdots = c_m = 0$. Die Lösung x kann durch Rückwärtseinsetzen bestimmt werden. Sie ist eindeutig, falls $r = n$, d.h., wenn $r = \operatorname{Rang} D$ maximal ist.

Für $r < n$ gibt es $n - r$ linear unabhängige Lösungen u_k des homogenen linearen Gleichungssystems ($c_1 = \cdots = c_m = 0$), d.h. $\dim \operatorname{Kern} D = n - r$. Die Unbekannten, die den Spalten ohne Pivots entsprechen, können frei gewählt werden.

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems hat die Form

$$x = x_* + \sum_{k=1}^{n-r} s_k u_k$$

mit x_* einer beliebigen speziellen Lösung von $Dx = c$.

Beispiel

Typische Fälle von Gleichungssystemen $Dx = c$ in Zeilenstufenform

(i) $m = n = 2$:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 \\ 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$r = 2$ $\boxed{\text{Pivots}}$ $\implies$ Rang $D = 2$ maximal, eindeutige Lösung
Rückwärtseinsetzen $\rightsquigarrow$ $x = (-1, 2)^{\mathrm{t}}$

(ii) $m = 3 < n = 4$:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

reduzierte Zeilenstufenform (Pivot-Spalten = Einheitsvektoren)
$r = 2 < m$ $\boxed{\text{Pivots}}$, $c_{r+1} = 5 \neq 0$ (inkompatibel mit der Nullzeile) $\implies$ keine Lösung

(iii) $m = 4 < n = 5$:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$r = 3 < n$ $\boxed{\text{Pivots}}$, $c_{r+1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad$ lösbar
kanonische Lösung: nur die Unbekannten x_1, x_2, x_4 zu den Pivot-Spalten ungleich Null
$\rightsquigarrow \quad x_* = (-1, 0, 0, 2, 0)^{\mathrm{t}}$
Rang $D = 3 = n - 2 \quad \Longrightarrow$
zwei linear unabhängige Lösungen u_k des homogenen Systems
$\rightsquigarrow \quad$ allgemeine Lösung:

$$x = x_* + s_1 u_1 + s_2 u_2, \quad s_k \in \mathbb{R}$$

Bestimmung von u_k durch kanonische Wahl der nicht zu den Pivot-Spalten gehörigen Unbekannten x_3 und x_5 und Berechnung der restlichen Unbekannten als Lösungen des homogenen Systems $Dx = (0, \ldots, 0)^{\mathrm{t}}$:

$$
\begin{aligned}
x_3 = 1, x_5 = 0 \quad &\rightsquigarrow \quad u_1 = (3/2, -3/2, 1, 0, 0)^{\mathrm{t}} \\
x_3 = 0, x_5 = 1 \quad &\rightsquigarrow \quad u_2 = (-17/2, -5/2, 0, -2, 1)^{\mathrm{t}}
\end{aligned}
$$