Verfahren von Gram-Schmidt

Aus einer Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ kann wie folgt eine orthogonale Basis $\{u_1, \ldots, u_n\}$ konstruiert werden. Man definiert sukzessive

$$u_j = b_j - \sum_{k<j} \frac{\langle u_k, b_j \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k,$$

für $j = 1, \ldots, n$. Dabei ist die Summe die orthogonale Projektion von b_j auf $\operatorname{span}(u_1, \ldots, u_{j-1})$.

Die Rekursion vereinfacht sich, wenn man die Basisvektoren nach jedem Schritt normiert:

$$u_j \leftarrow \frac{u_j}{|u_j|}.$$

In diesem Fall ist $\langle u_k, u_k \rangle = 1$.

Beweis

Zeige induktiv: $u_1, \ldots, u_\ell$ bilden eine orthogonale Basis für span $(b_1, \ldots, b_\ell)$.

- $\ell = 1: \quad u_1 = b_1 \quad \checkmark$
- Induktionsschritt ($\ell \to \ell + 1$):
  für $j \le \ell$

$$\begin{aligned} \langle u_j, u_{\ell+1} \rangle &= \left\langle u_j, b_{\ell+1} - \sum_{k \le \ell} \frac{\langle u_k, b_{\ell+1} \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k \right\rangle \\ &= \langle u_j, b_{\ell+1} \rangle - \sum_{k \le \ell} \frac{\langle b_{\ell+1}, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} \underbrace{\langle u_j, u_k \rangle}_{\delta_{k,j} |u_j|^2} = 0 \end{aligned}$$

$\implies \quad u_1, \ldots, u_{\ell+1}$ orthogonal, da $u_j \perp u_k$ für $j, k \le \ell$ nach Induktionsvoraussetzung

$$b_{\ell+1} - u_{\ell+1} \in \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_\ell) = \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_\ell)$$

$\implies \quad$ Beide Basen spannen denselben Unterraum auf.

Beispiel

Orthonormale Basis $\{u_1, u_2, u_3\}$ für den von den Vektoren

$$b_1 = (1,1,1,1)^\mathrm{t},\ b_2 = (1,2,1,0)^\mathrm{t},\ b_3 = (2,2,0,0)^\mathrm{t}$$

aufgespannten Unterraum von $\mathbb{R}^4$

$|b_1| = \sqrt{1+1+1+1} = 2 \quad \rightsquigarrow \quad u_1 = (1,1,1,1)^\mathrm{t}/2$

zwei Schritte des Gram-Schmidt-Verfahrens

$$u_2 \quad \| \quad b_2 - \langle u_1, b_2\rangle u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Normierung $\quad \rightsquigarrow \quad u_2 = (0,1,0,-1)^\mathrm{t}/\sqrt{2}$

$$u_3 \parallel b_3 - \langle u_1, b_3\rangle u_1 - \langle u_2, b_3\rangle u_2 =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normierung $\quad \rightsquigarrow \quad u_3 = (1, 0, -1, 0)^{\mathrm{t}}/\sqrt{2}$

Kontrolle

$$\begin{aligned} \underbrace{(1,2,1,0)^{\mathrm{t}}}_{b_2} &= 2u_1 + \sqrt{2}u_2 = (1,1,1,1)^{\mathrm{t}} + (0,1,0,-1)^{\mathrm{t}} \\ \underbrace{(2,2,0,0)^{\mathrm{t}}}_{b_3} &= 2u_1 + \sqrt{2}u_2 + \sqrt{2}u_3 \\ &= (1,1,1,1)^{\mathrm{t}} + (0,1,0,-1)^{\mathrm{t}} + (1,0,-1,0)^{\mathrm{t}} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad$ Übereinstimmung der aufgespannten Unterräume

Beispiel

Konstruktion einer bzgl. des Skalarproduktes

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

orthogonalen Folge von Polynomen $p_0, p_1, \ldots$ aus den Monomen $q_j(x) = x^j$

Verfahren von Gram-Schmidt $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
p_0 &= q_0 = 1 \\
p_1 &= q_1 - \frac{\langle p_0, q_1\rangle}{\langle p_0, p_0\rangle} p_0 = q_1 - \frac{\int_{-1}^{1} 1\cdot x\,\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} 1\cdot 1\,\mathrm{d}x}\cdot 1 = x - 0 \\
p_2 &= q_2 - \frac{\int_{-1}^{1} x\cdot x^2\,\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} x\cdot x\,\mathrm{d}x}\cdot x - \frac{\int_{-1}^{1} 1\cdot x^2\,\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} 1\cdot 1\,\mathrm{d}x}\cdot 1 = x^2 - 0\cdot x - \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

allgemeine Formel: $p_{n+1} = q_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \frac{\langle p_j, q_{n+1}\rangle}{\langle p_j, p_j\rangle}\, p_j$

Vereinfachung durch Verwendung von $\tilde{q}_{n+1}(x) = xp_n(x)$ anstelle von $q_{n+1}(x) = x^{n+1}$
Legitim, da $xp_n(x) = x^{n+1} + \sum_{j \leq n} c_j x^j \quad \Longrightarrow$

$$\operatorname{span}\{p_1, \ldots, p_n, q_{n+1}\} = \operatorname{span}\{p_1, \ldots, p_n, \tilde{q}_{n+1}\}$$

$\rightsquigarrow$ alle Summanden bis auf $j = n - 1$ Null
$j = n$: aufgrund der Antisymmetrie des Integranden

$$\langle p_n, \tilde{q}_{n+1} \rangle = \int_{-1}^{1} p_n(x)\, xp_n(x)\, \mathrm{d}x = 0$$

$j < n - 1$: $[x\, p_j(x)]$ Linearkombination von $p_k(x)$, $k < n \quad \Longrightarrow$

$$\langle \tilde{p}_j, q_{n+1} \rangle = \int_{-1}^{1} p_n(x)\, [x\, p_j(x)]\, \mathrm{d}x = 0\,,$$

da $p_n \perp p_k$

andere Normierung $\quad\rightsquigarrow\quad$ Legendre-Polynome

$$p_n(x) = \alpha_n x^n + \dots, \quad \alpha_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

Gram-Schmidt-Prozess $\quad\rightsquigarrow\quad$ 3-Term-Rekursion

$$(n+1)p_{n+1}(x) = (2n+1)xp_n(x) - np_{n-1}(x)$$

mit $p_0(x) = 1$ und $p_1(x) = x$