Vektorraum

Ein Vektorraum über einem Körper K (K-Vektorraum) ist eine kommutative Gruppe $(V, +)$, auf der zusätzlich zu der Gruppenoperation „$+$“ eine Skalarmultiplikation „$\cdot$“ definiert ist,

$$K \times V \ni (s, v) \mapsto s \cdot v \in K\,,$$

die folgende Eigenschaften besitzt:

$$\begin{aligned}
(s_1 + s_2) \cdot v &= s_1 \cdot v + s_2 \cdot v \\
s \cdot (v_1 + v_2) &= s \cdot v_1 + s \cdot v_2 \\
(s_1 \cdot s_2) \cdot v &= s_1 \cdot (s_2 \cdot v) \\
1 \cdot v &= v
\end{aligned}$$

für alle Skalare $s, s_1, s_2 \in K$, Elemente v, v_1, $v_2 \in V$ und das Einselement $1 \in K$.

Der Einfachheit halber wird das Pluszeichen sowohl für die Addition in V als auch für die Addition in K verwendet. Ebenso wird der Malpunkt für die Skalarmultiplikation meist weggelassen.

Für $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$ spricht man von einem reellen bzw. komplexen Vektorraum.

Beispiel

Reeller (komplexer) Vektorraum der Polynome p vom Grad $\leq n$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad a_k \in \mathbb{R} \quad (a_k \in \mathbb{C})$$

Definition der Addition und Skalarmultiplikation in der nahe liegenden Weise:

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x), \quad (sp)(x) = sp(x)$$

Polynome mit Grad n ($a_n \neq 0$) bilden auf Grund eventueller Gradreduktion bei Addition keinen Vektorraum,
z.B.

$$(\underbrace{x^2 - 1}_{\text{Grad } 2}) + (\underbrace{3 - x^2}_{\text{Grad } 2}) = \underbrace{2}_{\text{Grad } 0}$$

Beispiel

Reeller Vektorraum der Folgen (a_n), $a_n \in \mathbb{R}$

- Addition: $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$
- Skalarmultiplikation: $s(a_n) = (sa_n)$

Vektorräume spezieller Folgen:
beschränkte Folgen, konvergente Folen, konvergente Folen, komplexe Folgen

Monotone Folgen bilden keinen Vektorraum, denn Summen monotoner Folgen sind nicht notwendig monoton; z.B.

$$(n^2) + (-2^n) : \; -1, 0, 1, 0, -7, -28, \ldots .$$

Vektorraum der n-Tupel

Für einen Körper K bilden die n-Tupel oder n-Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad a_k \in K$$

den K-Vektorraum K^n mit der komponentenweise definierten Addition und Skalarmultiplikation, d.h.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ \vdots \\ s \cdot a_n \end{pmatrix}$$

für $a_k, b_k, s \in K$.

Oft schreibt man n-Tupel als Zeilenvektor

$$a^{\mathrm{t}} = (a_1, \ldots, a_n) \quad \text{bzw.} \quad a = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{t}} \, .$$

Durch das Symbol „t“ der Transposition wird von der Standardkonvention als Spaltenvektor unterschieden.

Für $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$ erhält man die Vektorräume der n-Tupel reeller und komplexer Zahlen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$.