## Untergruppe

Für eine Gruppe $(G, \diamond)$ bezeichnet man $(U, \diamond)$ als Untergruppe, wenn $U$ eine Teilmenge von $G$ ist, die selbst eine Gruppe bildet.
Um zu testen, ob $(U, \diamond)$ die Gruppenaxiome erfüllt, genügt es zu überprüfen, dass $U$ bezüglich der Verknüpfung $\diamond$ und der Bildung von Inversen abgeschlossen ist:

$$a, b \in U \implies a \diamond b \in U \quad \wedge \quad a \in U \implies a^{-1} \in U \, .$$

## Beispiel

Gruppe der Kongruenzabbildungen eines Quadrates

$$ABCD \mapsto BCDA,\ ABCD \mapsto ADCB,\ \dots$$

Untergruppe der Drehungen $D_\alpha$: $\alpha = 0°, 90°, 180°, 270°$

$$\begin{array}{rccc} 0° : & ABCD & \mapsto & ABCD \\ 90° : & ABCD & \mapsto & BCDA \\ 180° : & ABCD & \mapsto & CDAB \\ 270° : & ABCD & \mapsto & DABC \end{array}$$

abgeschlossen bzgl. Verknüpfung und Invertierung

$$D_\alpha \circ D_\beta = D_{\alpha+\beta}, \quad (D_\alpha)^{-1} = D_{-\alpha}$$

Spiegelungen bilden keine Untergruppe:
Verknüpfung $\quad\rightsquigarrow\quad$ Drehung, z.B. Komposition von Spiegelung an der Diagonale durch $A$ und $C$,

$$S_1 : ABCD \;\mapsto\; ADCB\,,$$

und Spiegelung an der Mittelsenkrechten auf der Strecke von $A$ nach $B$,

$$S_2 : ABCD \;\mapsto\; BADC\,,$$

$\rightsquigarrow$

$$D = S_2 \circ S_1 : ABCD \;\mapsto\; BCDA$$

$\widehat{=}$ Drehung um $90^\circ$

Für Spiegelungen existiert ebenfalls kein neutrales Element.