Unitäre Diagonalisierung

Eine $n \times n$-Matrix A ist normal, wenn sie mit ihrer Adjungierten $A^* = \bar{A}^{\mathrm{t}}$ ($A^* = A^{\mathrm{t}}$ für reelle Matrizen) kommutiert:

$$A^* A = A A^* \,.$$

Normalität von A ist äquivalent zu unitärer Diagonalisierbarkeit, d.h. es existiert eine orthonormale Basis aus Eigenvektoren $u_1, \ldots, u_n$ und

$$U^* A U = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad U = (u_1, \ldots, u_n),\; U^* = U^{-1}\,,$$

mit λ_k den Eigenwerten von A.

Beweis

(i) Orthogonale Diagonalisierbarkeit $\implies$ Normalität:

$$U^{-1} \underset{U\,\text{unitär}}{=} U^*, \quad U^{-1}AU = D \,\text{bzw.}\, UDU^{-1} = UDU^*$$

mit $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \implies$

$$\begin{aligned}
AA^* &= (UDU^*)(UDU^*)^* \\
&\underset{(BC)^*=C^*B^*}{=} UD(U^* \underbrace{U^{**}}_{U})D^*U^* \\
&\underset{U^*U=E}{=} U(D^*D)U^* \\
&\underset{U^*U=E}{=} (UD^*U^*)(UDU^*) \\
&= A^*A
\end{aligned}$$

$DD^* = D^*D$ wegen $\lambda\bar{\lambda} = \bar{\lambda}\lambda$

(ii) Normalität $\implies$ orthogonale Diagonalisierbarkeit:
konstruiere zunächst eine orthogonale Matrix V mit

$$V^*AV = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \underline{0}^{\mathrm{t}} \\ \hline \underline{0} & B \end{array}\right), \quad B \text{ normal}, \; \underline{0} = (0,\ldots,0)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^{n-1}$$

Ansatz: $V = (v|\tilde{V})$, wobei die Spalten von $\tilde{V}$ einen normierten Eigenvektor v zum Eigenwert λ zu einer Orthonormalbasis ergänzen

$$\rightsquigarrow \quad V^*AV = \left(\begin{array}{c} v^* \\ \hline \tilde{V}^* \end{array}\right) \left(\; \lambda v \; \middle| \; A\tilde{V} \; \right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & c^* \\ \hline \underline{0} & B \end{array}\right) = D$$

noch zu zeigen: $BB^* = B^*B \;\wedge\; c = (0,\ldots,0)^{\mathrm{t}}$
Ähnlichkeitstransformationen erhalten Normalität $\rightsquigarrow$ $DD^* = D^*D$, d.h.

$$\left(\begin{array}{c|c} |\lambda|^2 + |c|^2 & c^*B^* \\ \hline Bc & BB^* \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} |\lambda|^2 & \overline{\lambda}c^* \\ \hline \lambda c & B^*B \end{array}\right)$$

Vergleich der Diagonalblöcke $\implies$ gewünschte Eigenschaften nehme induktiv an, dass B mit einer unitären Matrix W diagonalisierbar ist, d.h.

$$W^* B W = \tilde{D}$$

$\Longrightarrow$ A wird durch

$$U = V \left(\begin{array}{c|c} 1 & \underline{0}^{\mathrm{t}} \\ \hline \underline{0} & W \end{array} \right),$$

diagonalisiert, denn

$$\begin{aligned} U^* A U &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & \underline{0}^{\mathrm{t}} \\ \hline \underline{0} & W^* \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \underline{0}^{\mathrm{t}} \\ \hline \underline{0} & B \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \underline{0}^{\mathrm{t}} \\ \hline \underline{0} & W \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \underline{0} \\ \hline \underline{0}^{\mathrm{t}} & W^* B W \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \underline{0} \\ \hline \underline{0}^{\mathrm{t}} & \tilde{D} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Beispiel

Diagonalisierung der normalen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} & 1-2\mathrm{i} \\ 1-2\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

(i) Überprüfung der Normalität:

$$\begin{aligned} A^*A &= \begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} \\ 1+2\mathrm{i} & 1-2\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} & 1-2\mathrm{i} \\ 1-2\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} \\ AA^* &= \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} & 1-2\mathrm{i} \\ 1-2\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} \\ 1+2\mathrm{i} & 1-2\mathrm{i} \end{pmatrix} = \text{gleiches Resultat} \quad \checkmark \end{aligned}$$

(ii) Eigenwerte- und Vektoren:
beide Zeilensummen von A gleich 2 $\quad \Longrightarrow$
2 ist Eigenwert mit Eigenvektor $(1,1)^{\mathrm{t}}$

Orthogonalität der Eigenvektoren $\implies$
$(-1,1)^{\mathrm{t}}$ ist ein zweiter Eigenvektor

$$\begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} & 1-2\mathrm{i} \\ 1-2\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\mathrm{i} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\implies$ 4i ist der zugehörige Eigenwert

(iii) Diagonalisierung:
Normierung der Eigenvektoren $\rightsquigarrow$ Transformationsmatrix

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und $U^*AU = D$, $D = \operatorname{diag}(2, 4\mathrm{i})$
Überprüfung durch Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} U^*AU &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} & 1-2\mathrm{i} \\ 1-2\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & -4\mathrm{i} \\ 2 & 4\mathrm{i} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8\mathrm{i} \end{pmatrix} = D \quad \checkmark \end{aligned}$$