Transponierte und adjungierte Matrix

Durch Vertauschen der Indizes (Spiegelung an der Diagonalen) erhält man aus einer $m \times n$-Matrix A die transponierte $n \times m$-Matrix A^{t}, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad A^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Konjugiert man bei einer (komplexen) Matrix A zusätzlich alle Einträge, so ergibt sich die adjungierte Matrix $C = A^* = \bar{A}^{\mathrm{t}}$, d.h.

$$a_{j,k} = u_{j,k} + \mathrm{i}v_{j,k}, \quad c_{j,k} = \bar{a}_{k,j} = u_{k,j} - \mathrm{i}v_{k,j}\,.$$

Stimmt eine Matrix A mit ihrer Transponierten überein, $A = A^{\mathrm{t}}$, bezeichnet man A als symmetrisch, eine Matrix mit $A = A^*$ heißt selbst-adjungiert oder hermitesch. Für reelle Matrizen bedeuten die Begriffe symmetrisch und hermitesch dasselbe.

Es gelten folgende Regeln:

$$\begin{aligned} (AB)^{\mathrm{t}} &= B^{\mathrm{t}} A^{\mathrm{t}}, & \qquad (AB)^* &= B^* A^*, \\ (A^{\mathrm{t}})^{-1} &= (A^{-1})^{\mathrm{t}}, & \qquad (A^*)^{-1} &= (A^{-1})^*. \end{aligned}$$

Beweis

(i) Elemente von $C = AB$ und $D = (AB)^{\mathrm{t}}$

$$c_{i,k} = \sum_j a_{i,j} b_{j,k}, \quad d_{i,k} = c_{k,i} = \sum_j a_{k,j} b_{j,i} = \sum_j b_{j,i} a_{k,j}$$

$\implies \quad d_{i,k}$: Element (i,k) von $B^{\mathrm{t}} A^{\mathrm{t}}$, d.h. $D = (AB)^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}} A^{\mathrm{t}}$

$\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$ und $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b} \quad \implies \quad$ gleiche Formel für die Adjungierte

(ii) $\left(A^{-1}\right)^{\mathrm{t}} = (A^{\mathrm{t}})^{-1}$ folgt aus

$$E = E^{\mathrm{t}} = \left(AA^{-1}\right)^{\mathrm{t}} = \left(A^{-1}\right)^{\mathrm{t}} A^{\mathrm{t}}$$

Entsprechendes gilt für die Adjungierte.

Beispiel

Illustration der Regeln für transponierte und adjungierte Matrizen für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

(i) Matrix-Produkt:

$$\begin{aligned}
(AB)^* &= \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 0 & -2+\mathrm{i} \\ 4+\mathrm{i} & 1 & 2+4\mathrm{i} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \overline{2\mathrm{i}} & \overline{0} & \overline{-2+\mathrm{i}} \\ \overline{4+\mathrm{i}} & \overline{1} & \overline{2+4\mathrm{i}} \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \\
&= \begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & 4-\mathrm{i} \\ 0 & 1 \\ -2-\mathrm{i} & 2-4\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
B^*A^* &= \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1-2\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & 4-\mathrm{i} \\ 0 & 1 \\ -2-\mathrm{i} & 2-4\mathrm{i} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(ii) Matrix-Inverse:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}}_{A^*} \begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$

$$(A^{-1})^* \;=\; \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}^{-1} = (A^*)^{-1}$$