Summe und Produkt von Eigenwerten

Für die Eigenwerte λ_k einer $n \times n$-Matrix A gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \operatorname{Spur} A, \quad \prod_{k=1}^{n} \lambda_k = \det A\,,$$

wobei mehrfache Eigenwerte entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit gezählt werden.

Diese Identitäten können unter anderem zur Kontrolle bei Eigenwertberechnungen verwendet werden.

Beweis

Die Eigenwerte λ_k sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det(a_1 - \lambda e_1, \ldots, a_n - \lambda e_n)\,,$$

wobei a_k die Spalten von A und e_k die Einheitsvektoren bezeichnen.
Multilinearität der Determinante $\quad\rightsquigarrow\quad$ Summe von 2^n Determinanten, die man nach Potenzen von λ zusammenfassen kann:

$$p_A(\lambda) = (-\lambda)^n \det(e_1, \ldots, e_n) + (-\lambda)^{n-1} c + \cdots + (-\lambda)^0 \det(a_1, \ldots, a_n)$$

mit

$$c = \det(a_1, e_2, \ldots, e_n) + \det(e_1, a_2, \ldots, e_n) + \cdots + \det(e_1, e_2, \ldots, a_n)$$

$a_1 = \sum_{k=1}^n a_{k,1} e_k$ und $\det(e_j, \ldots, e_j, \ldots, e_n) = 0$ (Antisymmetrie der Determinante)

$\implies \quad \det(a_1, e_2, \ldots, e_n) = a_{1,1} \det(e_1, \ldots, e_n)$

gleiches Argument für die anderen Summanden in der Darstellung von c, $\det(e_1, \dots, e_n) = 1 \quad \rightsquigarrow$

$$p_A(\lambda) = (-\lambda)^n + \underbrace{(a_{1,1} + \cdots + a_{n,n})}_{\text{Spur } A}(-\lambda)^{n-1} + \cdots + \det(a_1, \dots, a_n)$$

Vergleich mit der Faktorisierung von p_A in Linearfaktoren,

$$p_A(\lambda) = \prod_{k=1}^{n}(\lambda_k - \lambda) = (-\lambda)^n + (\sum_k \lambda_k)(-\lambda)^{n-1} + \cdots + \prod_k \lambda_k$$

$\implies$ behauptete Identitäten

Beispiel

Summe und Produkt der Eigenwerte einer 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

charakteristisches Polynom

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c - \lambda & d \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

mit den Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

Summe der Eigenwerte

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{(a + d) + (a + d)}{2} = a + d = \operatorname{Spur} A$$

Produkt der Eigenwerte (via dritter Binomischer Formel)

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{(a + d)^2 - (a + d)^2 + 4(ad - bc)}{4} = ad - bc = \det A$$