Spiegelung

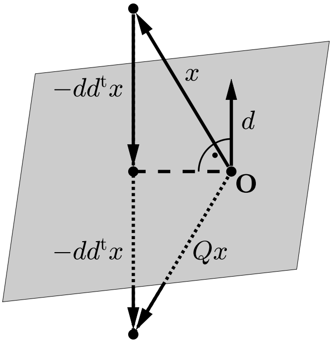
Eine Spiegelung an einer Hyperebene

$$H: \; d^{\mathrm{t}} x = 0\,,$$

mit normiertem Normalenvektor $d \in \mathbb{R}^n$ ($|d| = 1$) wird durch die symmetrische orthogonale Matrix

$$Q = E - 2dd^{\mathrm{t}}$$

mit E der Einheitsmatrix beschrieben.



Die Spiegelung lässt Vektoren in H invariant und ändert bei Vektoren parallel zu d das Vorzeichen:

$$Qx = x,\; x \perp d, \quad Qx = -x,\; x \parallel d\,.$$

Beweis

(i) Symmetrie von Q ✓

(ii) Orthogonalität:

$$QQ^{\mathrm{t}} = Q^2 = (E - 2dd^{\mathrm{t}})^2 = E^2 - 4dd^{\mathrm{t}} + 4d\,\underbrace{d^{\mathrm{t}}d}_{=1}\,d^{\mathrm{t}} = E$$

(iii) Spiegelungseigenschaft:
$x - Qx \parallel d$:

$$x - Qx = x - x + 2dd^{\mathrm{t}}x = 2(d^{\mathrm{t}}x)d$$

Mittelpunkt zwischen x und $Qx \in H$:

$$d^{\mathrm{t}}(x + Qx)/2 = (d^{\mathrm{t}}x + d^{\mathrm{t}}x - 2\,\underbrace{d^{\mathrm{t}}d}_{=1}\,d^{\mathrm{t}}x)/2 = 0$$

$\implies$ Qx ist Spiegelbild von x an der Hyperebene durch den Ursprung, die zu d orthogonal ist

Beispiel

Spiegelung an der Ebene H durch die Punkte

$$(0,0,0),\ (0,1,0),\ (3,0,4)$$

Normale

$$d = (-4,0,3)^{\mathrm{t}}/5, \quad |d| = 1$$

$\rightsquigarrow$ Spiegelungsmatrix

$$\begin{aligned} Q &= E - 2dd^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{25} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{25} \begin{pmatrix} 16 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.28 & 0 & .96 \\ 0 & 1 & 0 \\ .96 & 0 & 0.28 \end{pmatrix} \end{aligned}$$