Reelles Skalarprodukt

Ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf einem reellen Vektorraum V ist eine Abbildung

$$V \times V \ni (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- Positivität:
$$\langle v, v \rangle > 0 \quad \text{für } v \neq 0$$
- Symmetrie:
$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$
- Linearität:
$$\langle su + tv, w \rangle = s\langle u, w \rangle + t\langle v, w \rangle$$

Diese Identitäten gelten für alle $u, v, w \in V$ und $s, t \in \mathbb{R}$.

Aufgrund der Symmetrie ist ein reelles Skalarprodukt auch bezüglich des zweiten Argumentes linear, also eine Bilinearform auf V.

Für $V = \mathbb{R}^n$ ist das kanonische Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle = u^{\mathrm{t}} v = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n \,,$$

und

$$|u| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$$

ist die assoziierte Norm.

Beispiel

Skalarprodukt-Eigenschaften für Abbildungen

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

f(x,y)	Positivität	Symmetrie	Linearität
$10x_1y_1 + x_2y_2$	✓	✓	✓
$\lvert x_1y_1 \rvert + \lvert x_2y_2 \rvert$	✓	✓	
$x_1y_2 + x_2y_1$		✓	✓
$4x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$	✓		✓
$x_1y_1^3 + x_2^3y_2$	✓		
$x_1x_2 + y_1y_2$		✓	
$x_1y_2 + 2x_2y_1$			✓
x_1^3			

Beispiel

Skalarprodukt auf dem Vektorraum der auf $[0, 1]$ definierten, reellwertigen stetigen Funktionen:

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Positivität, Linearität, Symmetrie $\quad \checkmark$

Verallgemeinerung mit einer positiven Gewichtsfunktion w:

$$\langle f, g \rangle_w = \int\limits_0^1 fg\, w$$

z.B: gewichtete Skalarprodukte für radialsymmetrische Funktionen auf der Kreisscheibe oder Kugel:

$$\int_0^1 f(r)g(r)r\,\mathrm{d}r, \quad \int_0^1 f(r)g(r)r^2\,\mathrm{d}r$$

Komplexes Skalarprodukt

Ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf einem komplexen Vektorraum V ist eine Abbildung

$$V \times V \ni (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle \in \mathbb{C}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- Positivität: $\langle v, v \rangle > 0 \quad \text{für} \;\; v \neq 0$
- Schiefsymmetrie: $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
- Linearität: $\langle u, sv + tw \rangle = s\langle u, v \rangle + t\langle u, w \rangle$

Diese Identitäten gelten für alle $u, v, w \in V$ und $s, t \in \mathbb{C}$.

Aufgrund der Schiefsymmetrie ist ein komplexes Skalarprodukt bezüglich der ersten Variablen nicht linear:

$$\langle su + tv, w \rangle = \bar{s}\langle u, v \rangle + \bar{t}\langle u, w \rangle \,.$$

Lediglich für reelle Skalare s, t ist die komplexe Konjugation ohne Bedeutung.

Für $V = \mathbb{C}^n$ ist das kanonische Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle = u^* v = \bar{u}^{\mathrm{t}} v = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 & \cdots & \bar{u}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \bar{u}_1 v_1 + \cdots + \bar{u}_n v_n \,,$$

und

$$|u| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{|u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2}, \quad |u_k|^2 = \bar{u}_k u_k \,,$$

ist die assoziierte Norm.

Gebräuchlich ist auch die komplexe Konjugation des zweiten Arguments des Skalarprodukts,

$$\langle u, v\rangle = \sum_k u_k \bar{v}_k \,.$$

Diese andere Definition des Skalarprodukts komplexer Vektoren ist jedoch weniger konsistent mit den Regeln des Matrix/Vektor-Kalküls - den „liegenden" adjungierten Vektor u^* erhält man durch Transposition und Konjugation des „stehenden" Vektors u.

Beispiel

Skalarprodukt von Vektoren in $\mathbb{C}^2$

$$x = \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ -2-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

komplexes Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2$

$$(\overline{1+2\mathrm{i}}) \cdot 2 + (\overline{-2-\mathrm{i}}) \cdot 2\mathrm{i} = (1-2\mathrm{i}) \cdot 2 + (-2+\mathrm{i}) \cdot 2\mathrm{i} = 2 - 4\mathrm{i} - 4\mathrm{i} - 2 = -8\mathrm{i}$$

Das Konjugieren ist notwendig für die Positivität der assoziierten Norm.
keine Konjugation $\quad \rightsquigarrow \quad$ falsche Definition der Längen

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} &= \sqrt{(1+2\mathrm{i})^2 + (-2-\mathrm{i})^2} \\ &= \sqrt{1 + 4\mathrm{i} - 4 + 4 + 4\mathrm{i} - 1} = \sqrt{8\mathrm{i}} \notin \mathbb{R} \\ \sqrt{y_1^2 + y_2^2} &= \sqrt{2^2 + (2\mathrm{i})^2} = \sqrt{4-4} = 0 \not> 0 \end{aligned}$$

richtige Berechnung

$$
\begin{aligned}
|x| &= \sqrt{\bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2} \\
&= \sqrt{(1+4)+(4+1)} = \sqrt{10} \\
|y| &= \sqrt{2 \cdot 2 + (2\mathrm{i}) \cdot (-2\mathrm{i})} = \sqrt{8}
\end{aligned}
$$