Rayleigh-Quotient

Für eine hermitesche positiv definite Matrix S ($S^* = S$, $x^* S x > 0$ für $x \neq (0, \ldots, 0)^{\mathrm{t}}$) sind die Extremwerte des sogenannten Rayleigh-Quotienten

$$r_S(x) = \frac{x^* S x}{x^* x}, \quad x \neq (0, \ldots, 0)^{\mathrm{t}},$$

der kleinste und größte Eigenwert von S.
Insbesondere gilt für die der euklidischen Norm zugeordneten Matrix-Norm

$$\|S\|_2 = \max_x r_S(x) = \lambda_{\max}, \quad \|S^{-1}\|_2 = 1/\min_x r_S(x) = 1/\lambda_{\min}.$$

Beweis

Transformation auf Diagonalform mit unitärer Matrix $U = (u_1, \cdots, u_n)$ aus Eigenvektoren $\quad \rightsquigarrow$

$$U^* S U = D, \quad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad S u_k = \lambda_k u_k \quad \text{mit } \lambda_k \in \mathbb{R}$$

S positiv definit $\quad \Longrightarrow$

$$\lambda_k = \frac{u_k^* S u_k}{u_k^* u_k} = \frac{u_k^* \lambda u_k}{u_k^* u_k} > 0$$

und o.B.d.A. $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$
Substitution von $S = UDU^*$ und $x = Uy \quad \rightsquigarrow$

$$r_S(x) = \frac{x^* S x}{x^* x} = \frac{(Uy)^* \, UDU^* \, Uy}{y^*(U^* U) y} \underset{U^* U = E}{=} \frac{\sum_k \lambda_k |y_k|^2}{\sum_k |y_k|^2}$$

$\lambda_k > 0 \implies$

$$\lambda_{\min} \leq r_S(x) \leq \lambda_{\max}$$

mit Gleichheit für $y = e_n$ und $y = e_1$

Beispiel

Rayleigh-Quotient der Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Invarianz des Rayleigh-Quotienten $r_s(x)$ unter Skalierung $(x \to \lambda x)$
$\rightsquigarrow$ o.B.d.A. $x = (\cos t, \sin t)^{\mathrm{t}}$
$x^* x = |x|^2 = 1 \quad \Longrightarrow$

$$r(x) = \frac{x^* S x}{x^* x} = 3\cos^2 t + 4\cos t \sin t + 3\sin^2 t = 3 + 2\sin(2t)$$

Extrema

$$0 \stackrel{!}{=} 4\cos(2t) \quad \Longrightarrow \quad t \in \{\pm\pi/4 + k\pi/2 : \ k \in \mathbb{Z}\}$$

kleinster und größter Eigenwert

$$\lambda_+ = \max_x r_S(x) = 3 + 2\sin(\frac{\pi}{2}) = 5, \ \lambda_- = \min_x r_S(x) = 3 + 2\sin(-\frac{\pi}{2}) = 1$$

Kontrolle mit Hilfe der Identitäten für Determinante und Spur

$$
\begin{aligned}
9 - 4 &= \det A = \lambda_+ \lambda_- = 5 \cdot 1, \\
3 + 3 &= \operatorname{Spur} A = \lambda_+ + \lambda_- = 5 + 1
\end{aligned}
$$