Rang einer Matrix

Für eine $m \times n$-Matrix A stimmt die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen u_j^{t} mit der maximalen Anzahl linear unabhängiger Spalten v_k überein und wird Rang der Matrix genannt:

$$\operatorname{Rang} A = \dim \underbrace{\operatorname{span}(u_1, \ldots, u_m)}_{U} = \dim \underbrace{\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)}_{V} .$$

Bezeichnet $L : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto Ax \in \mathbb{R}^m$ die durch A definierte lineare Abbildung, so ist

$$U = (\operatorname{Kern} L)^\perp, \quad V = \operatorname{Bild} L$$

mit $W^\perp$ dem orthogonalen Komplement eines Unterraums W ($w^\perp \in W^\perp \iff \langle w^\perp, w\rangle = 0 \quad \forall w \in W$).

Offensichtlich gilt

$$\operatorname{Rang} A \leq \min(m, n) ,$$

und für eine invertierbare $n \times n$-Matrix A ist $\operatorname{Rang} A = n$.

Der Rang von A lässt sich bestimmen, indem man mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine orthogonale Basis für U oder V konstruiert. Alternativ kann man A auf Zeilenstufen-Form (Echelon-Form) transformieren. Die dazu nötigen Operationen, Addition von Zeilenvielfachen und Permutationen von Zeilen oder Spalten, lassen den Rang unverändert. Rang A ist dann die Anzahl der Pivots.

Beweis

zu zeigen:

$$\dim U = \dim V \quad (= \operatorname{Rang} A)$$

Satz über die Dimension von Bild und Kern der mit A assoziierten linearen Abbildung $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \Longrightarrow$

$$\dim V = \dim \operatorname{Bild} A = n - \dim \operatorname{Kern} A$$

$$w \in \operatorname{Kern} A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u_1^{\mathrm{t}} \\ \vdots \\ u_m^{\mathrm{t}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h. } u_j^{\mathrm{t}} w = 0 \, \forall j$$

$\Longrightarrow \quad U = (\operatorname{Kern} A)^\perp$ (orthogonales Komplement)

$\Longrightarrow \quad$ Dimensionen addieren zu n:

$$n = \dim U + \dim \operatorname{Kern} A$$

Einsetzen in die Dimensionsformel $\quad \Longrightarrow \quad$ Behauptung

Beispiel

Rang von $m \times n$-Matrizen mit $m, n \leq 3$

(i) 2×2-Matrix $A = (v_1, v_2)$:

$$\operatorname{Rang} A = \begin{cases} 0, & \text{falls } v_1 = v_2 = (0,0)^{\mathrm{t}} \\ 1, & \text{falls } v_1 \parallel v_2 \\ 2, & \text{falls } v_1 \nparallel v_2 \end{cases}$$

z.B.

$$\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

(ii) 2×3-Matrix $A = \begin{pmatrix} u_1^{\mathrm{t}} \\ u_2^{\mathrm{t}} \end{pmatrix}$, 3×2-Matrix $A = (v_1, v_2)$:

gleiches Kriterium für die beiden, die Matrix definierenden Vektoren, wie im Fall (i), z.B.

$$\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

(iii) 3×3-Matrix $A = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\operatorname{Rang} A = \begin{cases} 0, & \text{falls } v_1 = v_2 = v_3 = (0,0,0)^{\mathrm{t}} \\ 1, & \text{falls } v_1 \parallel v_2 \parallel v_3 \\ 2, & \text{falls } v_k \text{ linear abhängig, nicht alle parallel} \\ 3, & \text{falls } v_k \text{ linear unabhängig} \end{cases}$$

z.B.

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 1,\ \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{(1)}{=} 2,\ \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{(2)}{=} 3$$

(1) Zeilen linear abhängig:

$$(1,1,2) + (2,2,1) - (3,3,3) = (0,0,0)$$

(2) Berechnung des Rangs durch Transformation auf Dreiecksform durch Addition von Zeilenvielfachen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{(a)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \underset{(b)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

(a) (Zeile 2)-3·(Zeile 1), (Zeile 3)-2·(Zeile 1)
(b) Vertauschen von Zeile 2 und Zeile 3, (Zeile 3)-5·(Zeile 2)
Diagonalelemente der Dreiecksform ungleich 0 $\quad \Longrightarrow \quad$ Rang $A = 3$

Beispiel

Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(i) Gram-Schmidt-Verfahren:
Konstruktion einer orthogonalen Basis $\{b_1, b_2, \ldots\}$ für den durch die Spalten $v_1, \ldots, v_5$ von A aufgespannten Bildraum V der linearen Abbildung $x \mapsto Ax$ (Rang $A = \dim V$)

Schritt 1:
$b_1 = v_1 = (1,1,2,2)^{\mathrm{t}}$

Schritt 2:
$$b_2 = v_2 - \frac{b_1^{\mathrm{t}} v_2}{b_1^{\mathrm{t}} b_1} b_1 = (1,1,1,1)^{\mathrm{t}} - \frac{(1,1,2,2)(1,1,1,1)^{\mathrm{t}}}{(1,1,2,2)(1,1,2,2)^{\mathrm{t}}}(1,1,2,2)^{\mathrm{t}} = \\ (1,1,1,1)^{\mathrm{t}} - \frac{6}{10}(1,1,2,2)^{\mathrm{t}} = (2/5, 2/5, -1/5, -1/5)^{\mathrm{t}}$$

Schritt 3:

$b_1^{\mathrm{t}} v_3 = (1,1,2,2)(1,3,1,3)^{\mathrm{t}} = 12, \quad b_1^{\mathrm{t}} b_1 = 10,$

$b_2^{\mathrm{t}} v_3 = (2/5,2/5,-1/5,-1/5)(1,3,1,3)^{\mathrm{t}} = 4/5, \quad b_2^{\mathrm{t}} b_2 = 10/25$

$\rightsquigarrow$

$$b_3 = v_3 - \frac{b_1^{\mathrm{t}} v_3}{b_1^{\mathrm{t}} b_1} b_1 - \frac{b_2^{\mathrm{t}} v_3}{b_2^{\mathrm{t}} b_2} b_2 =$$

$$(1,3,1,3)^{\mathrm{t}} - \frac{12}{10}(1,1,2,2)^{\mathrm{t}} - \frac{4/5}{10/25}(2/5,2/5,-1/5,-1/5)^{\mathrm{t}} =$$

$$(-1,1,-1,1)^{\mathrm{t}}$$

Schritte 4 und 5:

$v_4 - \sum_{k=1}^{3} \frac{b_k^{\mathrm{t}} v_4}{b_k^{\mathrm{t}} b_k} b_k = (0,0,0,0)^{\mathrm{t}} \quad \implies \quad v_4 \in \operatorname{span}(b_1, b_2, b_3),$

d.h. kein weiterer Basisvektor, ebenso wie für v_5

$\implies \quad \operatorname{Rang} A = \dim V = 3$

(ii) Transformation auf Zeilenstufenform:

Gauß-Operationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{(1)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{(2)}{\rightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{(3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) (Zeile 2) − (Zeile 1), (Zeile 3) − 2·(Zeile 1), (Zeile 4) − 2·(Zeile 1)
(2) Vertauschen von (Zeile 2) und (Zeile 3), (Zeile 4) − (Zeile 2)
(3) (Zeile 4) − (Zeile 3)

3 Pivots,1, -1 und 2 $\quad\Longrightarrow\quad$ Rang $A = 3$