Quadrik

Für eine symmetrische $n \times n$-Matrix A, einen Vektor b und eine Konstante c ist

$$Q: \; x^{\mathrm{t}}Ax + 2b^{\mathrm{t}}x + c = \sum_{j,k} a_{j,k}x_jx_k + \sum_k b_kx_k + c = 0$$

eine Quadrik im $\mathbb{R}^n$. Mit

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} c & b^{\mathrm{t}} \\ \hline b & A \end{array}\right), \quad \tilde{x} = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x \end{array}\right)$$

kann man Q auch in der homogenen Form

$$Q: \; \tilde{x}^{\mathrm{t}}\tilde{A}\tilde{x} = 0$$

darstellen.

Man unterscheidet die folgenden Typen:

- kegelige Quadrik: Rang $\tilde{A} =$ Rang A,
- Mittelpunktsquadrik: Rang $\tilde{A} =$ Rang $A + 1$,
- parabolische Quadrik: Rang $\tilde{A} =$ Rang $A + 2$.

Beispiel

Typ der parameterabhängigen Quadrik

$$Q: \quad x_1^2 + \lambda x_2^2 + 2x_2 + \lambda = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Matrixschreibweise

$$Q: \quad x^{\mathrm{t}} A x + 2b^{\mathrm{t}} x + c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{x}^{\mathrm{t}} \tilde{A} \tilde{x} = 0,\, \tilde{x}^{\mathrm{t}} = (1, x^{\mathrm{t}})$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \lambda\,, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Q ist für $\lambda = 0$ eine parabolische ($\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 2 = 3$), für $\lambda = \pm 1$ eine kegelige ($\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A = 2$) und für alle anderen Werte von λ eine Mittelpunktsquadrik ($\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 1 = 3$).