Dominanz des größten Eigenwerts

Besitzt A einen betragsmäßig größten Eigenwert λ und ist die Dimension des Eigenraums V_λ maximal, d.h. gleich der algebraischen Vielfachheit von λ, so gilt für einen Vektor x mit einer nicht-trivialen Komponente $v \in V_\lambda$

$$A^n x = \lambda^n (v + o(1)), \quad n \to \infty$$

bzw. nach Normierung

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A^n x}{\|A^n x\|} = \frac{v}{\|v\|},$$

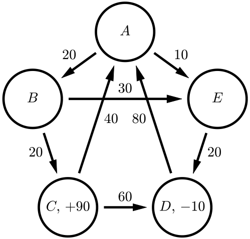
d.h. die normierten Potenzen streben gegen einen normierten Eigenvektor.

Insbesondere gelten beide Identitäten für Matrizen mit einem betragsmäßig größten einfachen Eigenwert.

Beispiel

Jährliche Veränderung der Marktanteile x_k konkurrierender Firmen

In dem illustrierten Fall gewinnt die Firma A jährlich 80% der Marktanteile der Firma D, und die Firma C vergrößert ihre Marktanteile um 90%, verliert jedoch gleichzeitig Marktanteile an die Firmen A und D.



Veränderung der Marktanteile

$$
\begin{aligned}
A_{\text{neu}} &= 0.7A + 0.4C + 0.8D \\
B_{\text{neu}} &= 0.5B + 0.2A \\
C_{\text{neu}} &= 0.9C + 0.2B \\
D_{\text{neu}} &= 0.1D + 0.6C + 0.2E \\
E_{\text{neu}} &= 0.8E + 0.1A + 0.3B
\end{aligned}
$$

Beschreibung durch eine Matrixmultiplikation

$$x_{\mathrm{neu}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}}_{P} x_{\mathrm{alt}}, \quad x = (A, B, C, D, E)^{\mathrm{t}}$$

Multiplikation mit der n-ten Potenz von P

$\rightsquigarrow$ Marktanteile nach n Jahren

Die normierten Vektoren

$$x^\circ = x / \|x\|_1, \quad \|x\|_1 = \sum_k |x_k|$$

konvergieren gegen einen Eigenvektor zum betragsmäßig größten Eigenwert:

$$\lambda_{\max} = 1.1, \quad v_{\max} = (3, 1, 1, 1, 2)^{\mathrm{t}} / 8$$

$\rightsquigarrow$ prozentuale Anteile $A:$ 37.5%, $B, C, D:$ 12.5%, $E:$ 25%

Beispiel

Rekursion der Fibonacci-Zahlen

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1},\ n > 0$$

$\rightsquigarrow$ Folge
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...

Matrixform der Rekursion:

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad x_n = (a_{n-1}, a_n)^{\mathrm{t}}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren von A:

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad v_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_\pm \end{pmatrix}$$

Darstellung des Startvektors als Linearkombination von v_+ und v_-,

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} v_+ - \frac{1}{\sqrt{5}} v_-$$

$\rightsquigarrow$ asymptotisches Verhalten

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \frac{\lambda_+^{n-1}}{\sqrt{5}} v_+ - \frac{\lambda_-^{n-1}}{\sqrt{5}} v_-$$

d.h.

$$a_n = \frac{\lambda_+^{n-1}}{\sqrt{5}} \lambda_+ - \frac{\lambda_-^{n-1}}{\sqrt{5}} \lambda_- = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^n (1 - \underbrace{(\lambda_-/\lambda_+)^n}_{o(1)})$$

andere Startwerte $a_1 = 1$ und $a_2 = 3$ $\rightsquigarrow$ Lucas-Zahlen:

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, \ldots$$

gleiches Wachstumsverhalten: $a_{n+1}/a_n \to (1 + \sqrt{5})/2$

Konvergenz von Matrix-Potenzen

Die Potenzen A^n, $n = 0, 1, \ldots$, einer Matrix konvergieren genau dann gegen die Nullmatrix, wenn der Betrag aller Eigenwerte λ kleiner als 1 ist.

Die Folge (A^n) bleibt beschränkt, wenn $|\lambda| \leq 1$ für alle Eigenwerte und für Eigenwerte mit Betrag 1 die algebraische gleich der geometrischen Vielfachheit ist, d.h. eine Basis aus Eigenvektoren für den Eigenraum V_λ existiert.

Andernfalls divergiert die Folge, insbesondere dann, wenn ein Eigenwert mit Betrag größer als 1 existiert.

Beweis

Darstellung der Potenzen mit der Jordan-Form $J = Q^{-1}AQ \quad \rightsquigarrow$

$$A^n = (QJQ^{-1})(QJQ^{-1})\cdots(QJQ^{-1}) = QJ^nQ^{-1}$$

$\Longrightarrow$ Es ist ausreichend die Konvergenz der Potenzen der Blockdiagonalmatrix J zu zeigen.
betrachte dazu die Blöcke

$$J_k = (\lambda_k E) + D$$

mit λ_k einem Eigenwert von A und D einer Matrix mit einer Nebendiagonale aus Einsen oder (für einen diagonalen Jordanblock) der Nullmatrix
$D^m = 0$ für einen Block der Dimension $m \quad \Longrightarrow$

$$(J_k)^n = \lambda_k^n E + \binom{n}{1}\lambda_k^{n-1}D + \cdots + \binom{n}{m-1}\lambda_k^{n-m+1}D^{m-1}$$

Definition des Binomialkoeffizienten, $\binom{n}{j} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-j+1)}{j\cdot(j-1)\cdots 1} \quad \Longrightarrow$
Konvergenzeigenschaften

$|\lambda_k| < 1$: $\lim_{n\to\infty} \binom{n}{j} |\lambda_k|^{n-k} \leq |\lambda_k^{-k}| \lim_{n\to\infty} n^j |\lambda_k|^n = 0$
$\implies$ $(J_k)^n \to$ Nullmatrix

$|\lambda_k| = 1$: $(J_k)^n$ nur beschränkt, wenn D die Nullmatrix ist

$|\lambda_k| > 1$: Divergenz, da $\lambda_k^n \to \infty$

Beispiel

Potenzen der 3×3-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(i) $A^n \to$ Nullmatrix, da der Betrag aller Eigenwerte ($1/2$ mit Vielfachheit 3) kleiner als 1 ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \ldots, A^n = \begin{pmatrix} 2^{-n} & n2^{1-n} & \frac{n(n-1)}{2}2^{2-n} \\ 0 & 2^{-n} & n2^{1-n} \\ 0 & 0 & 2^{-n} \end{pmatrix}$$

(ii) $\|B^n\| \leq \text{const}$, da der Betrag aller Eigenwerte kleiner oder gleich 1 ist, und der Eigenwert 1 einfach ist

$$B^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, B^n = \begin{pmatrix} 2^{-n} & n2^{1-n} & 0 \\ 0 & 2^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) C^n divergiert, da ein Eigenwert mit Betrag 1 und einem nicht-diagonalen Jordanblock existiert

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \ldots, C^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-n} \end{pmatrix}$$