## Positiv definite Matrizen

Eine quadratische Matrix $A$ ist positiv definit, falls

$$v^* A v > 0 \quad \forall v \neq (0, \dots, 0)^{\mathrm{t}}$$

($v^* = v^{\mathrm{t}}$ für reelle Vektoren).

Ist $v^* A v$ lediglich nicht-negativ, so bezeichnet man $A$ als positiv semidefinit.

Eine positiv definite Matrix $A$ hat ausschließlich positive Diagonalelemente und Eigenwerte. Insbesondere ist $A$ invertierbar und die Inverse ist ebenfalls positiv definit.

## Beweis

(i) Diagonalelemente:

$$g_{j,k} = e_j^{\mathrm{t}} \underbrace{Ae_k}_{\text{Spalte } k} > 0$$

(ii) Eigenwerte:

$$\begin{aligned} Av = \lambda v \qquad &\implies \qquad 0 < v^* A v = v^*(\lambda v) = \lambda |v|^2 \\ &\implies \qquad \lambda > 0 \end{aligned}$$

(iii) Inverse:

Eigenwerte $> 0 \quad \implies \quad$ Existenz von $A^{-1}$ und

$$v^* A^{-1} v = (AA^{-1}v)^* A^{-1} (A \underbrace{A^{-1} v}_{w}) = w^* A^* w = (\underbrace{w^* A w}_{>0})^* > 0$$

## Beispiel

Gramsche Matrix $G$ einer Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$:

$$g_{j,k} = \langle v_j, v_k \rangle$$

$G$ ist positiv definit, da

$$x^* G x = \sum_{j,k} \overline{x}_j g_{j,k} x_k = \Big\langle \underbrace{\sum_j x_j v_j}_{u}, \sum_k x_k v_k \Big\rangle = \langle u, u \rangle > 0$$

für $u \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \neq (0, \ldots, 0)^{\mathrm{t}}$

Hilbert Matrix:

Basis $p_k : x \mapsto x^k$, $k = 0, \ldots, n$, für Polynome vom Grad $\leq n$,

Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$

$$\rightsquigarrow \quad G : g_{j,k} = \langle p_j, p_k \rangle = \int_0^1 x^j x^k \, \mathrm{d}x = \frac{1}{1 + j + k}$$