Permutationen

Für eine endliche Menge M bilden die bijektiven Abbildungen $p: M \to M$, versehen mit der Komposition von Abbildungen als Operation, die symmetrische Gruppe von M.

Für $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ bezeichnet man diese Gruppe mit S_n und die $n!$ Elemente p als Permutationen. Die Permutationsgruppe ist nur für $n = 2$ kommutativ.

Man benutzt die Schreibweise

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ p(1) & p(2) & p(3) & \ldots & p(n) \end{pmatrix}$$

zur Beschreibung einer Permutation. Ebenfalls gebräuchlich ist die Zyklendarstellung. Ein Zyklus besteht aus einem Element und seinen Bildern bei wiederholter Ausführung der Permutation, bis wieder das ursprüngliche Element erreicht wird. Aus den Elementen, die im ersten Zyklus nicht vorkommen, werden weitere Zyklen gebildet, bis alle Elemente auftreten. Die Zyklen werden nach der Anzahl der Elemente absteigend sortiert und jeweils in runden Klammern hintereinander geschrieben. Zyklen der Länge 1 werden meist weggelassen.

Beispielsweise ist

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \equiv (1\,4\,6)\,(2\,3)\,(5) \quad \text{bzw.} \quad p = (1\,4\,6)\,(2\,3)\,.$$

Transposition und Signum einer Permutation

Eine Transposition

$$\tau = (j \; k)$$

ist eine Vertauschung von j und k. Durch Verknüpfung dieser elementaren Permutationen lässt sich jede Permutation p darstellen:

$$p = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_m$$

Die Parität (gerades oder ungerades m) ist eindeutig bestimmt, und man definiert

$$\sigma(p) = (-1)^m$$

als Vorzeichen oder Signum der Permutation p.

Für eine zyklische Permutation p ist $\sigma(p) = n - 1$ mit n der Länge des Zyklus. Der Exponent m kann damit aus der Zyklendarstellung einer Permutation als Summe der jeweils um 1 verminderten Zyklenlängen bestimmt werden.

Beweis

(i) Wohldefiniertheit von σ:
Beweis durch Induktion

- Induktionsanfang ($n = 2$):
  $S_2 = \{p, q\}$ mit $p = (1)(2)$ (Identität) und $q = (1\,2)$ (Transposition) in Zykelschreibweise
  $p = q \circ q \circ \cdots \circ q$ (gerade Anzahl) und $q = q \circ q \circ \cdots \circ q$ (ungerade Anzahl)
  $\implies$ eindeutig bestimmte Vorzeichen $\sigma(p) = 1$, $\sigma(q) = -1$
- Induktionsschritt ($(n-1) \to n$):
  betrachte
  $$\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_m = p \in S_n$$
  definiere
  $$q = (k\; n) \circ p \quad \text{mit } k = p(n)$$
  $\rightsquigarrow$ $q(n) = n$ und damit Identifikation von q mit einer Permutation $\tilde{q}$ in S_{n-1} mit
  $$\sigma(\tilde{q}) = (-1)(-1)^m$$
  Induktionsvoraussetzung $\implies$ $\sigma(\tilde{q})$ eindeutig bestimmt
  $\implies$ Exponent m eindeutig bestimmt

(ii) Vorzeichen von Zykeln:

$$p = (p_1\, p_2\, \ldots\, p_n) = \underbrace{(p_1\, p_2\, \ldots\, p_{n-1}) \circ (p_{n-1}\, p_n)}_{q},$$

denn $q(p_{n-1}) = p_n$, $q(p_n) = p(p_{n-1}) = p_1$
wiederholte Anwendung der Aufspaltung $\quad\rightsquigarrow\quad$ Darstellung von p als Komposition von $n-1$ Transpositionen

$$(p_1\, p_2) \circ (p_2\, p_3) \circ \ldots \circ (p_{n-1}\, p_n)$$

$$\implies \quad \sigma(p) = n - 1$$

Beispiel

Bestimmung des Signums der Permutation

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(i) Darstellung als Komposition von Transpositionen:
Überführung von

$$(p(1), \ldots, p(6)) = (6, 5, 3, 1, 2, 4)$$

durch Transpositionen sukzessive in die kanonische Reihenfolge:

$$\begin{aligned} (1\,6) &: \quad (1, 5, 3, 6, 2, 4) \\ (2\,5) &: \quad (1, 2, 3, 6, 5, 4) \\ (4\,6) &: \quad (1, 2, 3, 4, 5, 6) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\mathrm{id} = (4, 6) \circ (2, 5) \circ (1, 6) \circ p, \quad p = (1, 6) \circ (2, 5) \circ (4, 6)$$

und $\sigma(p) = (-1)^3 = -1$

(ii) Alternative Bestimmung von σ mit Hilfe der Zyklenschreibweise:

$$p = (1\,6\,4)\,(2\,5)\,(3)$$

$\sigma(\tau) = (-1)^{k-1}$ für einen Zyklus τ der Länge k, denn

$$(a\,b\,c\,\ldots\,f) = (a\,b) \circ (b\,c) \circ \ldots \circ (e\,f)$$

Anwendung auf das Beispiel $\rightsquigarrow$

$$\sigma(p) = (-1)^{(3-1)+(2-1)+(1-1)} = (-1)^3 = -1$$