Orthogonale und unitäre Matrizen

Eine komplexe $n \times n$-Matrix A ist unitär, falls

$$A^{-1} = \bar{A}^{\mathrm{t}} = A^* \, ,$$

d.h. falls die Spalten von A eine orthonormale Basis von $\mathbb{C}^n$ bilden.

Für relle Matrizen entfällt (wie auch beim Skalarprodukt) die komplexe Konjugation,

$$A^{-1} = A^{\mathrm{t}} \, ,$$

und man bezeichnet A als orthogonal.

Eine reelle (komplexe) $n \times n$-Matrix A ist genau dann orthogonal (unitär), wenn sie die euklidische Norm jedes Vektors invariant lässt:

$$|Av| = |v| \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \, (\in \mathbb{C}^n) \, .$$

Beweis

Es genügt, den allgemeineren komplexen Fall zu betrachten.

(i) A unitär $\implies$ $(Ay)^*(Ax) = y^* A^* Ax = y^* x$

$\leadsto$ Invarianz des komplexen Skalarprodukts und damit auch der Norm

(ii) Normtreue $\implies$ Normierung der Spalten v_j von A, die Bilder der Einheitsvektoren e_j sind:

$$|v_j| = |Ae_j| = 1$$

zum Beweis der Orthogonalität wähle $\lambda = \exp(\mathrm{i}\vartheta)$, so dass

$$s = v_j^*(\lambda v_k) \in \mathbb{R}$$

Normtreue und Definition der euklidischen Norm $\leadsto$

$$\begin{aligned} 2 &= |e_j + \lambda e_k|^2 = |v_j + \lambda v_k|^2 \\ &= |v_j|^2 + |\lambda|^2 |v_k|^2 + v_j^*(\lambda v_k) + \underbrace{(\lambda v_k)^* v_j}_{=\bar{s}=s} = 2 + 2s \end{aligned}$$

$\implies$ $s = 0$ und somit ebenfalls $v_j^* v_k = 0$

Beispiel

Einige elementare orthogonale und unitäre Matrizen

(i) Drehung (orthogonal):

$$A = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}, \quad c = \cos\varphi,\ s = \sin\varphi$$

$A^{\mathrm{t}}A \stackrel{!}{=} E$, d.h. $A^{\mathrm{t}} = A^{-1}$

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 + s^2 & -cs + sc \\ -sc + cs & (-s)^2 + c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

(ii) Spiegelung (symmetrisch, orthogonal):
d: normierter Normalenvektor der Spiegelungsebene $\quad\rightsquigarrow$

$$A = E - 2dd^{\mathrm{t}}$$

$A^{\mathrm{t}} \stackrel{!}{=} A$

$$(E - 2dd^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = E^{\mathrm{t}} - 2(dd^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = E - 2(d^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} d^{\mathrm{t}} = E - 2dd^{\mathrm{t}} = A \quad \checkmark$$

$A^{\mathrm{t}}A = AA \stackrel{!}{=} E$
geometrisch offensichtlich (zweifache Spiegelung $\quad\rightsquigarrow\quad$ Identität)
rechnerisch:

$$(E - 2dd^{\mathrm{t}})(E - 2dd^{\mathrm{t}}) = E - 2dd^{\mathrm{t}} - 2dd^{\mathrm{t}} + 4d\,\underbrace{d^{\mathrm{t}}d}_{=1}\,d^{\mathrm{t}} = E \quad \checkmark$$

konkrete Spiegelung: $d = (1,\,1,\,1)^{\mathrm{t}}/\sqrt{3} \quad\rightsquigarrow$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) Fourier-Matrix (unitär):

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$A^*A \overset{!}{=} E$, d.h. $A^* = A^{-1}$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Beispiel

Hadamard- Matrizen H: nach Normierung orthogonal, $h_{j,k} \in \{-1, 1\}$

Konstuktion für $n = 2^k$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rekursion

$$H_{2k} = \begin{pmatrix} H_k & H_k \\ H_k & -H_k \end{pmatrix}$$

Normierung $H_k/\sqrt{k} \quad \rightsquigarrow \quad$ orthogonale Matrizen

Fourier-Matrix

Die Fourier-Matrix besteht aus Potenzen der Einheitswurzel $w_n = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}$:

$$W_n = \begin{pmatrix} w_n^{0\cdot 0} & \cdots & w_n^{0\cdot(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{(n-1)\cdot 0} & \ldots & w_n^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Sie ist nach Normierung ($W_n \to W_n/\sqrt{n}$) unitär, d.h. $W_n^* W_n/n$ ist die Einheitsmatrix.

Die Orthogonalität der Spalten v_j folgt aus der geometrischen Summenformel

$$v_j^* v_k = \sum_{\ell=0}^{n-1} \overline{w_n^{\ell j}} w_n^{\ell k} = \sum_{\ell=0}^{n-1} w_n^{(k-j)\ell} = \frac{w_n^{(k-j)n} - 1}{w_n^{k-j} - 1} = 0, \quad j \neq k, \, ,$$

da $w_n^n = 1$.

Normale Matrizen

Eine komplexe Matrix A ist normal, falls

$$AA^* = A^*A, \quad A^* = \bar{A}^{\mathrm{t}}\,.$$

Insbesondere sind unitäre und hermitesche Matrizen normal.

Für reelle normale Matrizen entfällt die komplexe Konjugation, d.h.,

$$AA^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{t}}A\,.$$

Dies ist für orthogonale und symmetrische Matrizen erfüllt.

Beweis

A unitär, d.h. $A^* = A^{-1} \quad \Longrightarrow$

$$AA^* = AA^{-1} = E = A^{-1}A = A^*A$$

A hermitesch, d.h. $A^* = A \quad \Longrightarrow$

$$AA^* = AA = A^*A$$

Beide Eigenschaften sind demnach hinreichend für Normalität.

Für reelle Matrizen A ist $A^* = A^{\mathrm{t}}$. Die obigen Argumente gelten also auch für diesen Fall.

Beispiel

Konstruktion einer normalen 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$AA^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a^2 & b+ac \\ b+ac & b^2+c^2 \end{pmatrix}$$

$$A^{\mathrm{t}}A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+b^2 & a+bc \\ a+bc & a^2+c^2 \end{pmatrix}$$

normal, falls $AA^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{t}}A$, d.h. falls

$$a = \pm b \quad \wedge \quad b + ac = a + bc$$

$\iff$

$$a = b \quad \vee \quad (a = -b,\ c = 1)$$